

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie Klasa VII szkoły podstawowej
Zadania przygotowawcze do II spotkania etapu rejonowego w dniu 20 stycznia 2024 r.

- Tematyka:** 1. Obliczanie pól wielokątów. 4. Kąty wierzchołkowe, naprzemianległe, przyległe i odpowiadające. 5. Kąty zewnętrzne i wewnętrzne różnych wielokątów.
2. Układ współrzędnych.
3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

1. Uzupełnij kwadrat magiczny

$-2x$		
$-4x + 2y$		
$3x + 4y$		

	$2a - 3b$	
$6a$		$-a - 2b$

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y$		
	$-x - \frac{1}{4}y$	$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}y$

2. Dane są trzy punkty: $A = (-5, 2)$, $X = (-1, -3)$ i $Y = (-1, 6)$. Punkt X jest środkiem odcinka AB , punkt C jest środkiem odcinka BY . Podaj współrzędne punktów B i C . Zbadaj, który z trójkątów ma większe pole, trójkąt AXY , czy trójkąt ABC .

3. Dla liczb a i b określamy operacje: $a \triangle b = 2a - b + 1$ oraz $a \square b = a^2 - (b + 1)^3$.

Oblicz $(x \triangle x) \square (y \triangle y)$, jeśli $x = (-3) \square (-2)$ i $y = (-2) \triangle (-3)$.

4. Punkt O należy do wnętrza trójkąta ABC . Punkt A_1 należy do boku BC i odcinek OA_1 jest równoległy do boku CA . Punkt B_1 należy do boku CA i odcinek OB_1 jest równoległy do boku AB . Punkt C_1 należy do boku AB i odcinek OC_1 jest równoległy do boku BC . Miary kątów A_1OB_1 , B_1OC_1 i C_1OA_1 pozostają w stosunku $11 : 12 : 13$. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC .

5. W trójkącie ABC miara kąta CAB jest równa 40° , a miara kąta ABC jest równa 20° . Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie A_1 , dwusieczna kąta ABC przecina bok CA w punkcie B_1 , dwusieczna kąta BCA przecina bok AB w punkcie C_1 . Wszystkie trzy dwusieczne przecinają się w punkcie O i rozcinają trójkąt ABC na sześć „małych” trójkątów. Wśród trójkątów „małych” oraz trójkątów złożonych z dwóch lub trzech „małych” trójkątów wskaż parę trójkątów, które mają taki sam zestaw miar kątów wewnętrznych.

6. Punkt K należy do boku AB trójkąta ABC i długości odcinków AK i KB pozostają w stosunku $1 : 2$. Punkt M należy do boku BC tego trójkąta i długości odcinków BM i MC pozostają w stosunku $3 : 2$. Punkt P należy do boku CA tego trójkąta i długości odcinków CP i PA pozostają w stosunku $5 : 1$. Pole trójkąta AKP jest równe 2. Oblicz pola trójkątów KBP , BMP i MCP .

7. Oblicz pole czworokąta $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-4, 3)$, $B = (6, -5)$, $C = (4, 6)$, $D = (1, 3)$.

8. Punkty C , D znajdują się po tej samej stronie prostej AB . Trójkąt ABC jest równoramienny i $|AC| = |BC|$. Trójkąt ABD jest równoramienny i $|AB| = |BD|$. Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie O . Oblicz miarę kąta AOB , wiedząc, że miara kąta ACB jest równa 40° , a miara kąta ADB jest równa 80° .

9. Dla liczb a i b określamy operacje: $a \triangle b = a + b - 4$ oraz $a \square b = 3a + 4b$.

a) Oblicz: $32 \triangle 8$, $(-6) \triangle 11$, $13 \square 7$, $(-4) \square (-10)$, $(4 \square 11) \triangle (20 \square 13)$, $(-2) \square [(-3) \triangle (4 \square 5)]$.

b) Wykonaj operacje: $(3 \square x) \triangle (-2)$, $4 \square (x \triangle 2)$, $(4x - 1) \triangle (x - 2)$, $(1 - 2x) \triangle [3x \square (-2)]$;

10. Dany jest trójkąt ABC . Punkt D należy do boku AB i $|DB| = 7 \cdot |AD|$. Punkt E należy do boku BC i $|EC| = 6 \cdot |BE|$. Punkt F należy do odcinka CD i $|FD| = 5 \cdot |CF|$. Z trójkąta ABC odcięto kolejno trójkąty ACD , BDE , CEF . Pole trójkąta DEF jest równe 60. Oblicz pole trójkąta ABC . Który z odciętych trójkątów ma największe pole?

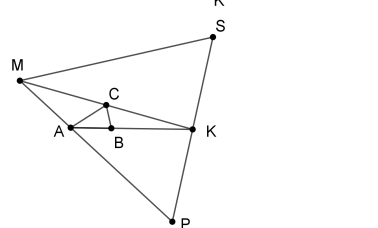
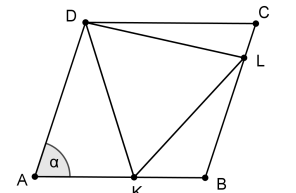
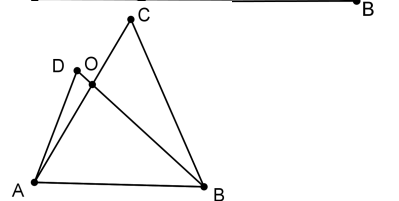
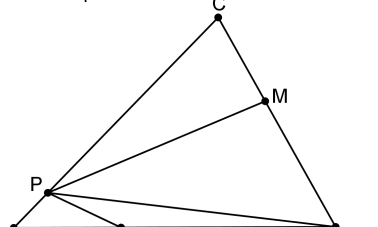
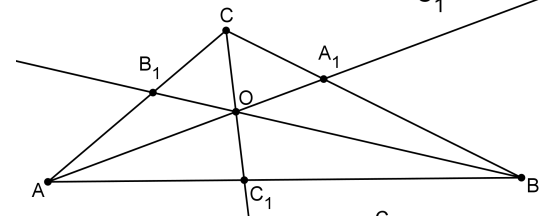
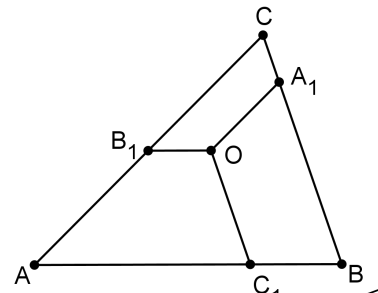
11. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem o kącie ostrym DAB równym α . Punkt K należy do boku AB i $|AD| = |KD|$. Punkt L należy do boku BC i trójkąt DKL jest równoboczny. Odcinki DL i BC są prostopadłe. Oblicz miarę kąta α oraz miary kątów trójkąta KBL .

12. Dany jest trójkąt ABC . Punkt K leży na prostej AB i $|BK| = 2 \cdot |AB|$. Punkt M leży na prostej KC i $|KC| = |CM|$. Punkt P leży na prostej MA i $|AP| = 2 \cdot |MA|$. Punkt S leży na prostej PK i $|PK| = |KS|$. Oblicz pole trójkąta MPS , jeśli wiadomo, że pole trójkąta ABC jest równe 1.

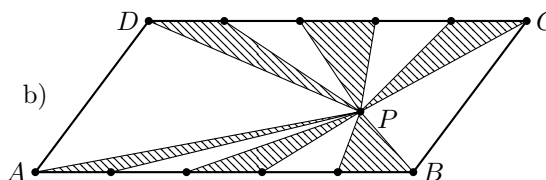
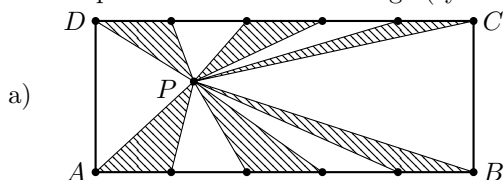
13. Punkty $(-3, 6)$, $(-3, -4)$ i $(2, 3)$ są trzema wierzchołkami równoległoboku. Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka. Rozważ wszystkie możliwe przypadki. Oblicz pole każdego z równoległoboków.

14. Punkty $A = (-8, 3)$ i $D = (-6, -4)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Punkt $X = (-3, 7)$ jest środkiem boku AB . Podaj współrzędne wierzchołków B i C . Oblicz pole równoległoboku.

15. Punkty $A = (-2, 4)$ i $B = (4, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , którego pole jest równe 24. Znajdź współrzędne punktu C wiedząc, że: a) odcięta punktu C jest równa -3 , b) trójkąt ABC jest równoramienny, c) trójkąt ABC jest prostokątny, d) trójkąt ABC jest ostrokątny.



16. Dany jest trójkąt ABC . Poprowadzono dwusieczne jego kątów **zewnątrznych**. Dwusieczne kątów **zewnątrznych** przy wierzchołkach A i B przecinają się w punkcie K , dwusieczne kątów **zewnątrznych** przy wierzchołkach B i C przecinają się w punkcie L , dwusieczne kątów **zewnątrznych** przy wierzchołkach C i A przecinają się w punkcie M . Miara kąta **wewnętrznego** przy wierzchołku C jest równa 60° , miara kąta **wewnętrznego** przy wierzchołku A jest równa α . Uzasadnij, że miara jednego z kątów **wewnętrznych** trójkąta KLM jest równa 60° .
17. W czworokącie $ABCD$ miary kątów wewnętrznych DAB , ABC , BCD oraz CDA pozostają w stosunku $3 : 5 : 7 : 5$. Poprowadzono dwusieczne kątów **zewnątrznych** tego czworokąta. Dwusieczne kątów o wierzchołkach A i B przecięły się w punkcie K , dwusieczne kątów o wierzchołkach B i C przecięły się w punkcie L , dwusieczne kątów o wierzchołkach C i D przecięły się w punkcie M , dwusieczne kątów o wierzchołkach D i A przecięły się w punkcie N . Oblicz miary kątów **wewnętrznych** czworokąta $KLMN$. Jaką figurą jest ten czworokąt?
18. Rozwiąż zadanie analogiczne do zadania poprzedniego w przypadku, gdy czworokąt jest $ABCD$ jest a) prostokątem, b) równoległobokiem o ostrym kącie α , c) trapezem równoramiennym o kącie α przy dłuższej podstawie.
19. W trapezie równoramiennym $ABCD$ o dłuższej podstawie AB , przekątna AC jest dwusieczną kąta BAD . Wiadomo, że kąty DAB i ACB mają równe miary. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O .
- (a) Oblicz miary wszystkich kątów wewnętrznych w trójkątach: AOB , BOC , COD i DOA .
- (b) Wskaż wszystkie odcinki, których długość jest równa długości podstawy CD .
20. Obwód prostokąta jest równy 360 cm. Dwusieczna jednego z kątów wewnętrznych dzieli dłuższy bok prostokąta w stosunku $2 : 5$. Oblicz długości boków prostokąta oraz iloraz pól figur, na które dwusieczna ta rozcięła prostokąt. Rozpatrz wszystkie przypadki.
21. Punkt D należy do boku AB trójkąta ABC i jest różny od punktów A i B . Uzasadnij, że iloraz pól trójkątów ACD i DCB jest równy ilorazowi długości odcinków AD i DB .
22. Trójkąt ABC jest równoramienny, przy czym $|AC| = |BC|$. Punkt D należy do ramienia BC . Kąt BAD ma miarę trzykrotnie **większą** od miary kąta DAC . Wiadomo też, że odcinki AD i DC są tej samej długości. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkątów ABD i ADC .
23. Punkt E należy do boku AB równoległoboku $ABCD$ i nie jest wierzchołkiem tego równoległoboku. Prosta DE przecina przekątną AC w punkcie X . Uzasadnij, że pola trójkątów AXD i EXC są równe.
24. Miary **zewnątrznych** kątów trójkąta pozostają w proporcji $4 : 3 : 2$. Znajdź miarę kąta między dwusiecznymi wychodzącymi z wierzchołków mniejszych kątów **wewnętrznych** tego trójkąta.
25. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Przekątna AC dzieli ten czworokąt na trójkąty ACB i ACD . Uzasadnij, że iloraz wysokości BB_1 trójkąta ACB i wysokości DD_1 trójkąta ACD jest równy ilorazowi pól trójkątów ACB i ACD .
26. Równoległobok $ABCD$ ma pole równe 60 . Punkt E należy do boku AB i $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{2}$. Punkt F należy do boku BC i $\frac{|CF|}{|FB|} = \frac{2}{3}$. Oblicz pole trójkąta DEF .
27. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano dwa punkty D i E takie, że $|AC| = |AD|$ i $|BC| = |BE|$. Oblicz miarę kąta $\angle DCE$.
28. Na okręgu o środku O znajdują się punkty $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ o tej własności, że kąty $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \dots, \angle A_9OA_{10}, \angle A_{10}OA_1$ mają miarę 36° . Punkty te są wierzchołkami dziesięciokąta $A_1A_2A_3 \dots A_{10}$. Oblicz miary kątów przecięcia się przekątnych:
- a) A_1A_3 i A_2A_4 ; b) A_1A_3 i A_2A_5 ; c) A_1A_3 i A_2A_6 .
29. Boki AB i CD prostokąta $ABCD$ (równoległoboku $ABCD$) podzielono na 5 równych odcinków. Punkt P jest dowolnym ustalonym punktem należącym do prostokąta $ABCD$ (równoległoboku $ABCD$). Jaką część pola prostokąta (równoległoboku) stanowi pole obszaru zamalowanego (rysunki)?



Uwaga W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań: *Liga Zadaniowa*, str. 69-73 (zad. 1-29, 34, 36, 45, 46, 48), str. 79-87 (zad. 101, 125, 126, 128, 130, 131, 141, 142, 163, 168, 169, 172-178, 182, 183); *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 47-52, 370-457, 534-556; *Koło matematyczne w szkole podstawowej*, str. 145-166; *Koło matematyczne w gimnazjum*, rozdziały: Kąty, Pola i obwody.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 47 bde, 402, 405, 406, 424, 435, 452, 552, 553.

Uwaga II W soboty, począwszy od 14 października, o godzinie 10:30 na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, ul. Chopina 12/18, odbywają się zajęcia koła matematycznego dla uczniów klas VII (lub młodszych) o tematyce związanej z „Ligą Zadaniową”. Harmonogram zajęć można znaleźć na stronie Ligi Zadaniowej <https://liga.mat.umk.pl/> Serdecznie zapraszamy.