

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa VII szkoły podstawowej

Zadania przygotowawcze do III spotkania drugiego etapu w dniu 6 kwietnia 2024 r.

Tematyka: 1. Zadania logiczne. 3. Równania w zadaniach tekstowych.
2. Przekształcanie wzorów. 4. Potęgi i pierwiastki.

1. Uzasadnij, że cyfrą jedności liczby $k = 2^{20} \cdot 3^{30} + 2^{19} \cdot 3^{31} + 2^{18} \cdot 3^{32} + 2^{17} \cdot 3^{33}$ jest cyfra 0.
2. Przez jaką największą potęgę liczby 3 dzielna jest liczba $m = (9^{27} - 27^9) \cdot (3^9 - 9^3)$?
3. Wiadomo, że $c = \frac{a+b}{2a-2b}$. Wyznacz z tej równości zmienną a , a następnie oblicz wartość tej zmiennej, gdy $b = (-3)^3$ i $c = -0,4$.
4. Oblicz:
$$\frac{\sqrt{7 \cdot \sqrt{676}} - 4 \cdot \sqrt[3]{343} + 2 \cdot \sqrt{121} \cdot \sqrt{\frac{(11 - \sqrt{11}) \cdot (11 + \sqrt{11})}{10}}}{(-\sqrt[4]{121})^2}$$
5. W trzech skrzynkach, złotej, srebrnej i brązowej, znajdują się dukaty. W srebrnej jest 80 dukatów, w złotej o 20% mniej niż w srebrnej, a liczby dukatów w skrzynce brązowej nie znamy.
Gdyby ze złotej skrzynki przenieść do srebrnej czwartą część zawartości złotej skrzynki, następnie ze srebrnej skrzynki przenieść do skrzynki brązowej czwartą część (powiększonej) zawartości srebrnej skrzynki i wreszcie ze skrzynki brązowej przenieść czwartą część (powiększonej) zawartości tej skrzynki do skrzynki złotej, to w każdej z tych trzech skrzynek byłaby taka sama liczba dukatów.
Ile jest dukatów w skrzynce złotej, a ile w brązowej?
6. Ośmiu zawodników z numerami od 1 do 8 rozdzielamy na dwie drużyny, z których każda liczy czterech członków. W drużynie A kapitanem jest zawodnik z numerem 1, w drużynie B kapitanem jest zawodnik z numerem 2.
Na ile sposobów można utworzyć drużyny A i B w taki sposób, aby w każdej z nich dokładnie dwie osoby miały numery nieparzyste? Ile wśród tych par drużyn jest par o tej własności, że suma numerów zawodników w każdej z drużyn jest dodatkowo podzielna przez liczbę 3? Wypisz te pary.
7. Pomidory zawierają 95% wody. Ile trzeba wziąć pomidorów, aby otrzymać z nich w procesie suszenia cztery kilogramy suszonych pomidorów, które zawierają 15% wody?
8. Przy okrągłym stole siada 5 osób: Ala, Bartek, Celina, Danko i Emil. Miejsca są ponumerowane liczbami od 1 do 5, zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Na miejscu z numerem 1 usiadła Ala. Na ile sposobów mogą usiąść pozostałe osoby, zachowując następującą regułę: **każda para sąsiadów ma imiona zaczynające się od liter, które NIE WYSTĘPUJĄ OBOK SIEBIE W ALFABECIE?**
9. Przez jakie najmniejsze liczby całkowite dodatnie należy przemnożyć liczby $A = 2016$, $B = 765 \cdot 56 \cdot 7$, aby otrzymać kwadrat (sześcián, czwartą potęgę, ...) liczby naturalnej?
10. Jeżeli w pewnej liczbie dwucyfrowej zamienimy kolejność cyfr, to otrzymamy liczbę o 75% większą od pierwszej. Znajdź wszystkie liczby o tej własności.
11. W dniu 15 marca Tobiasz zauważył, że w ostatnich dwóch tygodniach wydawał średnio 20 zł tygodniowo. Tydzień później okazało się, że zapisy Tobiasza z trzech początkowych tygodni marca wskazywały na to, iż wydawał on średnio 24 zł tygodniowo. Po upływie czterech tygodni marca chłopiec zauważył, że średnia z tygodniowych wydatków, liczona z 4 tygodni, była równa 25 zł. Ile pieniędzy wydał Tobiasz w trzecim tygodniu marca, a ile w czwartym?
12. Ze wzoru $c = \frac{3a+b}{2a+5b}$ wyznacz zmienną a , a następnie oblicz wartość a^7 , gdy $b = (-0,75)^2$ i $c = -3$.
13. Mały dźwig przeładowuje pewną ilość towaru w ciągu 12 godzin. Tę samą ilość towaru średni dźwig przeładowuje w ciągu 8 godzin, a duży dźwig w ciągu 5 godzin. Wspomnianą ilość towaru przez 2 godziny przeładowywały równocześnie dźwigi: mały i średni. Czy wystarczy dodatkowych 2 godzin na to, by przeładunek dokończyły dźwigi: średni i duży, podczas gdy mały dźwig zostanie wyłączony z pracy?
14. Janek powiedział do swojego brata: „Gdybyś oddał mi trzecią część swoich oszczędności, to mielibyśmy po tyle samo pieniędzy”. W tym momencie do pokoju weszła mama i wręczyła każdemu z chłopców po 60 złotych „kieszonkowego”. Wówczas Janek powiedział do brata: „Teraz mielibyśmy po tyle samo pieniędzy, gdybyś mi oddał czwartą część swoich oszczędności”. Ile pieniędzy miał przed wypłatą „kieszonkowego” każdy z braci? O ile procent wzrosły po wypłacie „kieszonkowego” oszczędności każdego z chłopców?
15. Wiedząc, że $\frac{2a+b}{3b} = \frac{1}{2}$, oblicz $\frac{(a - \frac{1}{2}b)^2 - (2a + \frac{3}{4}b)^2}{4a^2 - b^2}$.

16. Do podwieczorku urodzinowego dwóch bliźniaczek zasiadły obie jubilatki wraz z czworgiem gości. Średni wiek wszystkich uczestników podwieczorku był równy 18 lat. Gdy jubilatki wyszły na chwilę z pokoju, by otworzyć drzwi spóźnionym gościom, średnia wieku czterech osób pozostałych w pokoju była równa 22 lata. W jakim wieku były bliźniaczki?
17. Ze wzoru wyznacz zmienną a : a) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, b) $P = 2ab + 2ac + 2bc$, c) $S = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2}$,
d) $t = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, e) $x = \frac{a+3}{a+1}$, f) $c = \frac{a \cdot b}{a+b}$, g) $c = \frac{3a+b}{\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b}$.
18. Wiedząc, że $\frac{a-4b}{b} = 7$, oblicz: a) $\frac{2a+3b}{a}$, b) $\frac{a^2-4ab-16b^2}{a^2+b^2}$, c) $\frac{(a+2b)^2 - (2a-3b)^2}{(5b-a)^2}$.
19. Wiedząc, że $a^2 = a + 1$, uzasadnij, że $a^3 = 2a + 1$, $a^4 = 3a + 2$, $a^5 = 5a + 3$.
20. Pociąg, jadąc ze stałą prędkością, przejeżdża przez most długości 450 m w ciągu 45 sekund. Jadąc z tą samą prędkością w ciągu 15 sekund pociąg ten mija słup telegraficzny. Jaka jest długość pociągu i jaka jest jego prędkość w km/godz?
21. Andrzej jest **lżejszy** o 20% od Bartka, Bartek jest **cięższy** o 10% od Radka. Najlżejszy z chłopców waży 44 kg. Ustaw chłopców w kolejności od najlżejszego do najcięższego i podaj, ile waży każdy z nich.
22. Brat i siostra otrzymali od rodziców pewną ilość pieniędzy. Jeśli siostra odda bratu 20% swojej części, to brat będzie miał o 50% więcej pieniędzy niż siostra. Które dziecko otrzymało od rodziców więcej pieniędzy?
23. Okrągły stół nakryto dla pięciu osób, przy czym nakrycie dla każdej z osób, która zasiądzie przy stole, jest innego koloru: jedno żółte, drugie niebieskie, trzecie zielone, czwarte fioletowe i piąte pomarańczowe. Do stołu zasiadają panowie X i Y oraz panie A , B i C . Pan X nigdy nie siada obok pani A . Na ile sposobów można rozmieścić przy stole te pięć osób tak, aby pan X i pani A nie siedzieli obok siebie?
24. Oblicz: a) $\frac{4 \cdot 2^{20} + \frac{1}{4} \cdot 8^8 + 2 \cdot 4^{11}}{2^{22} + 4 \cdot 16^5}$, b) $\frac{8^3 \cdot 6^5}{8 \cdot 6^8 - 6 \cdot 12^5}$, c) $\frac{(3^2 + 5^2 + 6^2)^7}{(7^6 + 7^8)(3 \cdot 5^5 + 5^7)}$, d) $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$,
e) $\frac{2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}}$, f) $\frac{10^{42} \cdot 7^{41} - 10 \cdot 5^{43} \cdot 14^{40}}{2^{42} \cdot 35^{40} + 10^{40} \cdot 7^{41}}$, g) $\frac{4^6 \cdot 5^{12} + 2^5 \cdot 10^{10}}{40^4 \cdot 25^3 - 100^5}$, h) $\frac{48^4 \cdot 9^8}{18^4 \cdot 12^8 + 72^4 \cdot 6^8} : \left(\frac{3}{4}\right)^4$.
25. W każdej z podanych par liczb wskaż liczbę większą: a) $(1,5)^{64}$ i 6^{16} , b) 81^{64} i 4^{192} , c) 25^{27} i 8^{42} .
26. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej: 2^{90} , 3^{60} , 5^{45} , 8^{45} , 16^{30} .
27. W każdej z podanych par liczb wskaż liczbę mniejszą: a) $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$ i 10^{55} , b) 10^{55} i 2^{200} .
28. Uzasadnij, że liczba n jest podzielna przez liczbę k :
a) $n = 7^{2020} - 7^{2018}$ i $k = 3$, b) $n = 3^{80} + 3^{82} + 3^{84} + 3^{86}$ i $k = 41$, c) $n = 4^{20} + 4^{22} + 4^{24}$ i $k = 13$.
29. Podaj przynajmniej 2 pary liczb całkowitych dodatnich m i n takich, że $2 \cdot n^3 = m^4$.
30. Podaj cyfrę jedności liczb: 2^{100} , 3^{531} , 27^{345} , $234^{567} \cdot 567^{890}$, $2^{2018} + 3^{2019} + 4^{2020}$, $9^{888} + 7^{666} \cdot 4^{333}$.
31. Wypisz wszystkie dzielniki dodatnie podanych liczb: 3^5 , 2^8 , 7^{15} , 6^2 , 15^3 , $2^5 \cdot 3$, $3^4 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 7^3$, $7^3 \cdot 11 \cdot 13^2$.
32. Ile różnych dzielników dodatnich ma każda z podanych liczb: $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7$, $12^3 \cdot 14^4$, $33^4 \cdot 34^3 \cdot 35^2 \cdot 36$, $6^{12} \cdot 4^{10} + 6^{11} \cdot 4^{11} + 6^{10} \cdot 4^{12}$?
33. Oblicz: a) $\sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[3]{729}} + 9 \cdot \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{625} + 4 \cdot \sqrt[4]{81}}$, b) $(3\sqrt[3]{56} + 2\sqrt[3]{189} - 2\sqrt[3]{25 \cdot 35})^3$,
c) $\frac{10\sqrt{1+10\sqrt{64}}}{\sqrt[3]{444-101} + \sqrt[3]{4\sqrt{144}-\sqrt{441}}}$, d) $\frac{(\sqrt{6})^5 \cdot (\sqrt[3]{18})^6}{(\sqrt{8})^3 \cdot (\sqrt[3]{9})^{12}} \cdot \sqrt{3}$, e) $\frac{[3 \cdot (\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} + 1)]^2}{(\sqrt{5})^4 \cdot [(\sqrt{2})^6 + 1]}$,
f) $\frac{\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{27}} + 15 \cdot \sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{36 \cdot \sqrt[4]{48 \cdot 27}}} \cdot (2\sqrt{3})^2$, g) $\frac{\sqrt{5 \cdot \sqrt{121}} + 2 \cdot \sqrt[3]{343} - 5 \cdot \sqrt[4]{256}}{\sqrt{300} - \sqrt{108} + 3 \cdot \sqrt{3}} \cdot (-\sqrt{3})^3$.
34. Porównaj liczby: a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{125} + 120} + 120}$ i $\sqrt{2 \cdot \sqrt{256} - 3 \cdot \sqrt[4]{256} + 4 \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{2+5-6}}}$; b) $\sqrt[3]{\frac{2020}{2021}}$ i $\sqrt[3]{\frac{2019}{2020}}$;
c) $\sqrt{2 \cdot 4^5 + 2^{11}}$ i 2^6 ; d) $\sqrt{2}$ i $\sqrt[3]{3}$; e) $\sqrt[4]{3}$ i $\sqrt[5]{4}$.

Uwaga. W przygotowaniach do III spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań:

- *Liga Zadaniowa*, str. 32-33 (zad. 82-100), str. 46-68, str. 157 (zad. 21);
- *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 19-23, 27, 29, 30, 37-39, 42-46, 53-61, 99-153, 295-296, 313-315, 593, 594, 598, 605, 607, 609, 614, 619;
- *Koło matematyczne w szkole podstawowej*, rozdziały: Logika, Prędkość, droga, czas, Równania, Zadania o wieku;
- *Koło matematyczne w gimnazjum*, rozdziały: Równania i nierówności, Procenty, Zadania logiczne.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki

Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego, zadania 128, 135, 140, 152, 171, 177, 187, 207, 212, 233.