

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
województwo kujawsko-pomorskie
Prezent wakacyjny 2025 r.

1. Kolejne liczby naturalne zapisujemy jedna po drugiej, przy czym liczba 1 zapisana jest jeden raz, liczba 2 dwa razy, liczba 3 trzy razy, 4 cztery razy, ..., 10 dziesięć razy, 11 jedenaście razy, itd. Jaka cyfra znajduje się na miejscu 2025-tym w tym zapisie?

2. Niech $A = 1223334444$.

(a) Podaj wszystkie dodatnie i mniejsze od 20 dzielniki liczby A .

(b) Czy można wykreślić w zapisie liczby A jedną cyfrę tak, aby otrzymać liczbę:

- podzieloną przez 9,
- podzieloną przez 11,
- podzieloną przez 99?

3. Zapis liczby B powstaje poprzez wybranie pierwszych 111 cyfr zapisu opisanego w zadaniu 1, czyli

$$B = \underbrace{12233344445 \dots}_{111 \text{ cyfr}}.$$

(a) Oblicz sumę cyfr liczby B . Czy liczba B jest podzielna przez 3?

(b) Pomiedzy kolejne liczby tworzące zapis liczby B wstawiamy na przemian znaki $, , +$ i $, , -$ i tworzymy liczbę

$$S = 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + 3 - 4 + 4 - 4 + 4 - 5 + 5 - \dots + 10 - 10 + 10 - \dots$$

Oblicz S .

(c) Pomiedzy kolejne liczby tworzące zapis liczby B wstawiamy znak mnożenia $, , \cdot$ i tworzymy liczbę

$$M = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 11 \cdot \dots$$

- Przez jaką największą potęgę liczby 2 dzieli się liczba M ?
- Ile zer ma na końcu liczba M (po wykonaniu wszystkich działań)?
- Rozłóż liczbę M na czynniki pierwsze.

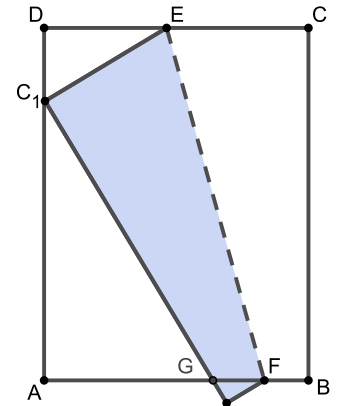
4. Na półce w łazience stoją kolorowe kubeczki, a w każdym z nich szczoteczka do zębów w tym samym kolorze co kubeczek. Na ile różnych sposobów można rozmieścić szczoteczki w kubeczkach tak, aby w żadnym przypadku kubeczek i szczoteczka NIE BYŁY TEGO SAMEGO KOLORU, jeśli każdy komplet „kubeczek i szczoteczka” jest innego koloru i kubeczków mamy:

(a) dwa, (b) trzy, (c) cztery, (d) pięć?

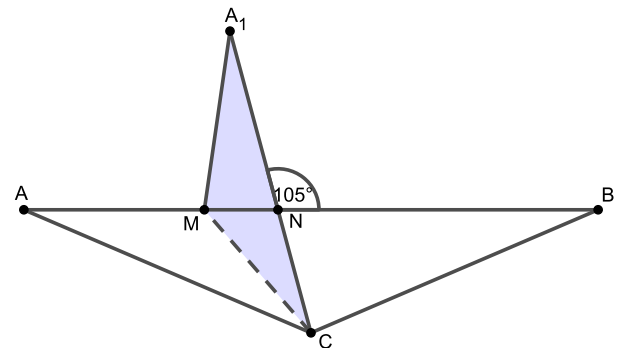
5. Przyglądamy się układowi cyfr na zegarze cyfrowym wskazującym godziny i minuty w systemie 24-godzinny.

- (a) Ile jest różnych zapisów na tym zegarze?
- (b) Ile jest różnych zapisów, w których występują trzy jednakowe cyfry i jedna inna?
- (c) Ile jest różnych zapisów, w których występują dwie różne cyfry i każda z nich powtarza się dwukrotnie?
- (d) Ile jest różnych zapisów, w których występują cztery KOLEJNE cyfry ustawione w dowolny sposób?
- (e) Ile jest różnych zapisów palindromicznych, tzn. takich, które są identyczne, gdy odczytać je od lewej strony do prawej i od prawej do lewej.

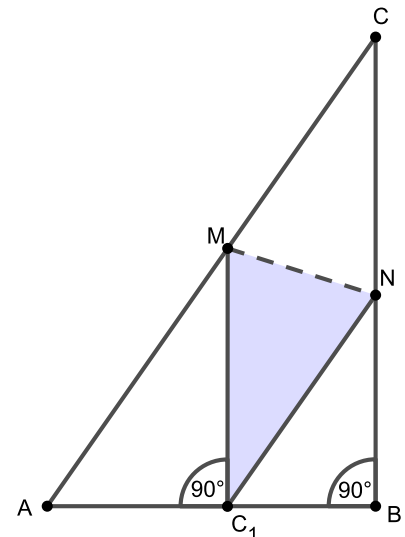
6. Prostokątną kartkę, białą z jednej strony i niebieską z drugiej, zgięto wzdłuż prostej EF w taki sposób, że wierzchołek C znalazł się na boku AD w położeniu C_1 (patrz rysunek). Wiadomo, że $|\angle C_1EF| = \alpha$. Wyraż za pomocą α kąty AGC_1 i AFE .



7. Z papieru białego z jednej strony i niebieskiego z drugiej wycięto trójkąt równoramienny ABC , a następnie jeden z jego narożników zgięto, jak na rysunku. Wiadomo, że $|AC| = |BC|$, punkt M należy do boku AB i $|AM| = |MC|$. Linie zgięcia wyznacza odcinek MC . Po zgięciu punkt A znalazł się w położeniu A_1 oraz $|\angle A_1NB| = 105^\circ$, przy czym punkt N jest przecięciem odcinków A_1C i AB . Oblicz kąt pięciokąta wklęsłego A_1MCBN .



8. Z papieru białego z jednej strony i niebieskiego z drugiej wycięto trójkąt prostokątny ABC . Narożnik z wierzchołkiem kąta ostrego C zgięto wzdłuż linii MN w taki sposób, że wierzchołek C znalazł się na przyprostokątnej AB w położeniu C_1 , przy czym MC_1 jest odcinkiem prostopadłym do AB (patrz rysunek). Uzasadnij, że trójkąt MNC_1 jest równoramienny.



Życzymy udanych wakacji!