Liga Zadaniowa - konkurs przedmiotowy z matematyki

Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa VI szkoły podstawowej

Zadania przygotowawcze do II spotkania etapu rejonowego w dniu 8 lutego 2025 roku

Tematyka:

1. Własności liczb. 2. Działania na liczbach wymiernych. 3. Podzielność liczb całkowitych.

1. Uzupełnij kwadraty magiczne:

a)

	-3	
	-15	
		8

b)

$2\frac{1}{10}$	$-1{,}5$	$-3\frac{3}{5}$

c)

		$0{,}5$
		$-2{,}1$
		$0{,}1$

d)

$(-2)^3$		-2^4
	$(-3)^2$	

2. W dniu 1 stycznia 2024 roku o godzinie 12:00 w południe pewne dwa zegary (mierzące czas w skali 24-godzinnej) wskazywały prawidłową godzinę. Wiadomo, że jeden z tych zegarów **spieszy się w ciągu doby** o trzy minuty, a drugi **spóźnia się w ciągu doby** o sześć minut. Podaj datę najbliższego dnia po 1 stycznia 2024, w którym zegary te ponownie wskażą tę samą godzinę. Jaka będzie rzeczywista godzina w tym momencie, a jaką godzinę wskażą te zegary?

3. Wyznacz cyfrę jedności liczby $10^{2024} + 5^{2023} + 3^{2022} + 2^{2021}$.

4. Ułamek prosty to ułamek o liczniku równym 1 i mianowniku będącym liczbą naturalną. Ułamek $\frac{7}{12}$ przedstaw w postaci sumy: **a)** dwóch ułamków prostych, **b)** trzech ułamków prostych o różnych mianownikach, **c)** czterech ułamków prostych o różnych mianownikach, **d)** pięciu ułamków prostych o różnych mianownikach.

5. Wyznacz wszystkie liczby 5-cyfrowe podzielne przez 36, w zapisie których występują tylko cyfry 4 lub 2.

6. Zbyszek w ciągu czterech dni przeczytał książkę. W pierwszym dniu przeczytał $\frac{3}{5}$ stron całej książki, w drugim przeczytał $\frac{3}{4}$ pozostałych stron, a w trzecim dniu $\frac{1}{3}$ tych stron, które mu jeszcze zostały. Czwartego dnia przeczytał ostatnie osiem stron tej książki. Ile stron ma ta książka?

7. Agnieszka zapisała na kartce trzy **różne** ułamki, sprowadziła je do najmniejszego wspólnego mianownika równego 12, a następnie zapisała kolejno od najmniejszego do największego i dodała. Wynik tego dodawania jest równy 1. Jakie ułamki mogła dodać Agnieszka? Podaj wszystkie możliwości.

8. Wyznacz wszystkie liczby 7-cyfrowe podzielne przez 18, w zapisie których występują tylko cyfry 2 lub 3, przy czym cyfra dziesiątek jest różna od cyfry jedności.

9. W teatrze na spektaklu jest mniej niż 500 widzów. Wiadomo, że można ich posadzić w 20 rzędach tak, aby w każdym rzędzie siedziało tyle samo osób. Można również posadzić ich w 30 rzędach tak, aby w każdym rzędzie siedziało tyle samo osób. Natomiast gdyby próbować posadzić ich w 25 rzędach, sadzając w każdym rzędzie tyle samo osób, to zostałoby 5 widzów. Ilu widzów jest w teatrze na tym spektaklu?

10. Rozważamy liczby 12-cyfrowe o następujących własnościach: liczba jest podzielna przez 36, a każda cyfra tej liczby jest jedynką lub zerem. Znajdź wszystkie takie liczby i oblicz ich sumę.

11. Liczba a jest najmniejszą liczbą naturalną o tej własności, że suma jej cyfr jest równa 2022. Liczba b jest najmniejszą liczbą naturalną o tej własności, że suma jej cyfr jest równa 2021.
a) Wyznacz pierwszą cyfrę liczby a i pierwszą cyfrę liczby b. **b)** Oblicz sumę cyfr sumy liczb a i b.

12. W dwóch klasach szóstych jest nie więcej niż 50 uczniów. Nauczycielka przeprowadziła identyczny sprawdzian w obu tych klasach i okazało się, że $\frac{1}{7}$ łącznej liczby uczniów z obu klas otrzymała piątkę, $\frac{1}{3}$ liczby wszystkich uczniów obu klas – czwórkę, połowa wszystkich uczniów obu klas – trójkę, zaś pozostałe osoby dwójkę. W żadnej klasie nie było szóstek i jedynek. Ile osób otrzymało dwójkę?

13. Wyznacz wszystkie liczby siedmiocyfrowe podzielne przez 15, w zapisie których występują tylko cyfry 3 i 5, przy czym cyfra 5 występuje więcej razy niż cyfra 3.

14. Kucharz restauracji ulepił więcej niż 200 pierogów. Chce zamrozić całą tę partię pierogów w woreczkach tak, aby w każdym woreczku była taka sama liczba pierogów. Najpierw zamierzał umieścić w każdym woreczku po 22 pierogi, ale okazało się, że wtedy zostałby mu jeden. Gdy zmniejszył liczbę woreczków o jeden, to udało się do nich rozłożyć całą partię pierogów tak, że w każdym woreczku było ich po tyle samo. Ile pierogów ulepił kucharz?

15. W torebce jest mniej niż 200 cukierków. Ile ich jest, jeżeli wiadomo, że można je podzielić na 5 równych porcji i można je podzielić na 6 równych porcji, natomiast gdyby próbować podzielić je na 7 równych porcji, to zostałyby nam trzy cukierki.

16. Znajdź wszystkie liczby czterocyfrowe podzielne przez 36, w których zapisie nie występuje cyfra 0, wszystkie cyfry są parzyste i cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.
17. Ułamek prosty to ułamek o liczniku równym 1 i mianowniku będącym liczbą naturalną. Każdy z podanych ułamków: $\frac{7}{16}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, przedstaw w postaci sumy pewnej liczby różnych ułamków prostych.
18. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, które nie są podzielne ani przez 4, ani przez 5?
19. Rozważmy najmniejszą liczbę naturalną, której suma cyfr jest równa 2019 oraz najmniejszą liczbę naturalną, której suma cyfr jest równa 2020.
    (a) Wyznacz pierwszą cyfrę każdej z tych dwóch liczb. (b) Oblicz sumę cyfr sumy tych dwóch liczb.
20. Ile jest liczb siedmiocyfrowych większych od 5000000 podzielnych przez 15, w których zapisie cyfra 0 występuje pięć razy, a pozostałe cyfry są parzyste i różne?
21. Ile jest liczb siedmiocyfrowych większych od 6000000 podzielnych przez 12, w których zapisie cyfra 0 występuje pięć razy, a pozostałe cyfry są nieparzyste i różne?
22. Dane są ułamki $\frac{44}{298}$ i $\frac{21}{369}$. Znajdź przykład liczby naturalnej różnej od zera, która przy dzieleniu przez każdy z podanych ułamków daje liczbę naturalną. Wskaż najmniejszą liczbę naturalną różną od zera o tej własności.
23. Zbyszek miał dzbanek soku. Z tego dzbanka odlał $\frac{2}{3}$ zawartości do słoika. Następnie $\frac{1}{8}$ zawartości słoika odlał do szklanki, $\frac{5}{8}$ zawartości słoika wypił, zaś resztę zawartości słoika przelał z powrotem do dzbanka. Jaki jest stosunek obecnej objętości soku w dzbanku do początkowej objętości soku w dzbanku?
24. Ile liczb naturalnych większych od 100 i jednocześnie mniejszych od 200 ma w rozkładzie na czynniki pierwsze jedynie tylko dwójki lub trójki?
25. Jan wypisał na tablicy wszystkie liczby trzycyfrowe o następujących własnościach: w każdej liczbie wszystkie jej cyfry są różne, a pierwsza cyfra jest równa kwadratowi ilorazu drugiej cyfry przez trzecią cyfrę. Ile liczb wypisał Jan?
26. Czy różnica między największą i najmniejszą z liczb czterocyfrowych podzielnych przez 36 jest podzielna przez 4?
27. Znajdź liczbę trzycyfrową, która ma następujące własności. Jeśli od tej liczby odejmiemy 7, to różnica ta będzie podzielna przez 7. Jeżeli od szukanej liczby odejmiemy 8, to różnica będzie podzielna przez 8. Jeżeli od szukanej liczby odejmiemy 9, to różnica będzie podzielna przez 9.
28. Czy istnieje liczba, przez którą można skrócić ułamek $\frac{2145}{14014}$, aby po skróceniu licznik miał tyle samo cyfr co mianownik?
29. Wstaw w miejsce Δ w wyrażeniu $\frac{1}{\Delta} \cdot \Delta + \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta + \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta$ odpowiednie liczby mając do dyspozycji trzy trójki, dwie dwójki i jedną jedynkę tak, aby wartość otrzymanego wyrażenia była liczbą całkowitą. Podaj trzy różne rozwiązania. *Uwaga: Jeżeli dwie sumy różnią się tylko kolejnością składników, to uznajemy je za to samo rozwiązanie.*
30. Wyznacz cyfrę jedności każdej z liczb: 2^{103}, 3^{205}, 17^{47}, 84^{105}.
31. Znajdź wszystkie liczby naturalne o cyfrach parzystych, mniejsze od 500 i podzielne przez 9.
32. Pani Krystyna hoduje psy. Ma ich tyle, że gdy dodaje do siebie liczbę psich ogonków, uszu i łapek, to otrzymuje ponad 100. Gdy zaś zsumuje tylko liczbę ogonków i liczbę łap, to otrzymuje mniej niż 80. Ile psów ma Pani Krystyna?
33. Wyznacz wszystkie liczby dwucyfrowe mające największą liczbę dzielników.
34. Ile jest liczb naturalnych mniejszych niż 2020, które są podzielne przez 4 i niepodzielne przez 3?
35. W zapisie liczby występują tylko 73 jedynki. Czy liczba ta dzieli się przez 111?
36. Wiadomo, że $p > q$. Która z liczb jest większa, $\frac{p}{2} + \frac{q}{2}$ czy q?
37. Smok ma 2020 głów. Rycerz może ściąć jednym cięciem 33 głowy lub 21 głów lub 17 głów lub 1 głowę. Smokowi odrasta odpowiednio 48, 0, 14 i 349 głów jednocześnie, tzn. jeśli rycerz zetnie 33 głowy, to smokowi odrośnie 48 głów itd. Smok zostanie zabity, jeśli wszystkie głowy zostaną ścięte. Czy rycerz może zabić smoka? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga I: Dodatkowe zadania przygotowawcze można znaleźć w książce „Liga Zadaniowa” str. 9-10, 15-18, w książce „Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego” zadania 228-231, 237, 240-241, 243-258, 283-285, 295-296, 312-337 oraz w książce „Koło matematyczne w szkole podstawowej” str. 121-131.

Uwaga II: W soboty, począwszy od 12 października, o godzinie 9:00 na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, ul. Chopina 12/18, odbywają się zajęcia koła matematycznego dla uczniów klas VI (lub młodszych) o tematyce związanej z „Ligą Zadaniową”. Harmonogram zajęć można znaleźć na stronie Ligi Zadaniowej https://liga.mat.umk.pl/ Serdecznie zapraszamy.