Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki

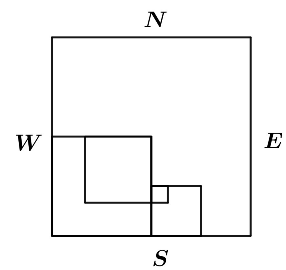
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa VII szkoły podstawowej

Zadania przygotowawcze na I spotkanie etapu rejonowego w dniu 16 listopada 2024 roku

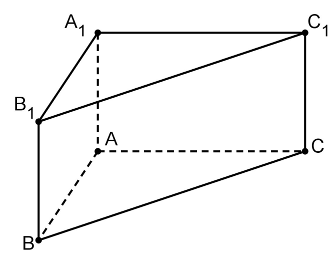
Tematyka: 1. Działania na liczbach wymiernych. 2. Podzielność liczb naturalnych i całkowitych. 3. Zadania tekstowe – proste równania i proste obliczenia procentowe. 4. Graniastosłupy.

1. Oblicz: a) $\dfrac{\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{0{,}4}:\frac{2}{0{,}3}\right):\left(\frac{5}{24}-\frac{8}{15}\right)}{[2{,}5-(-1{,}5)^2]:\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\frac{1}{4}}}}$ b) $\left(\dfrac{3{,}2}{1{,}4-0{,}6:2\frac{1}{7}}-10\right)\cdot\left[\dfrac{0{,}32}{0{,}2}-\left(\left(3\frac{3}{5}\right)^2-(-2{,}4)^2\right)\right]$.
2. Przedstaw liczbę $a = 1{,}2(24)$ w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego, następnie podaj rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{1}{a}$.
3. Do górskiego szałasu z domu Skrzata Borówki prowadzą trzy drogi. Skrzat zauważył, że wędrówka przez halę trwa o 25 minut krócej niż wzdłuż strumienia. Natomiast wspinaczka po skalistym zboczu trwa o 20% krócej niż droga przez halę i o 45% krócej niż droga wzdłuż strumienia. Ile czasu zajmuje Skrzatowi Borówce dojście do szałasu każdą z trzech dróg?
4. Oblicz $\dfrac{484}{1212}\cdot\dfrac{3\cdot 8484+6\cdot 4848}{8844-4488}$
5. Na górnej podstawie sześciennego pudełka o krawędzi 12 umieszczono cztery sześcienne pudełka o krawędziach długości 6, 4, 3 i 1. Na rysunku przedstawiono, jak konstrukcja ta wygląda z góry.

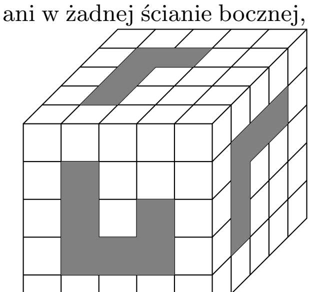


   a) Narysuj, zachowując proporcje długości krawędzi, jak wygląda ta konstrukcja oglądana od stron: S i E.

   b) Oblicz pole powierzchni całkowitej utworzonej bryły.
6. Objętość graniastosłupa trójkątnego $ABCA_1B_1C_1$ jest równa 180. Podstawa ABC jest trójkątem prostokątnym takim, że $|\sphericalangle CAB| = 90^\circ$ i $|AB| < |AC|$. Długości krawędzi AB, AC i AA_1 wyrażają się przez liczby naturalne **złożone**, tzn. przez liczby całkowite, większe od 1 i niebędące liczbami pierwszymi. Podaj wszystkie możliwe zestawy długości krawędzi AB, AC i AA_1.



7. Oblicz sumę 2022 cyfr występujących bezpośrednio po przecinku w zapisie rozwinięcia dziesiętnego liczby $\dfrac{56}{185}$.
8. Rozważamy liczbę $m = 80\cdot 84\cdot 88\cdot 92\cdot 96$. Czy liczba m jest podzielna a) przez 99? b) przez 333? Odpowiedź uzasadnij.
9. Do końca egzaminu, trwającego dwie godziny zegarowe, zostało 60% czasu, który upłynął od jego rozpoczęcia. Ile czasu zostało jeszcze do końca egzaminu?
10. Dwa identyczne atlasy botaniczne kosztowały tyle samo, co pięć identycznych słowników języka polskiego. Łączny koszt jednego atlasu i jednego słownika wynosił 210 zł. Atlas potaniał o 9%, a słownik podrożał o 19%. Jak zmienił się łączny koszt obu książek, wzrósł, czy zmalał? O ile procent zmienił się ten łączny koszt w stosunku do kosztu pierwotnego?
11. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe **trójkątne**, których wszystkie krawędzie mają długości wyrażające się przez liczby całkowite. Pole powierzchni bocznej pewnego takiego graniastosłupa jest równe 30. Jakie są możliwe długości jego krawędzi? Podaj wszystkie możliwości. Który z opisanych wyżej graniastosłupów, o polu powierzchni bocznej równej 30, ma najmniejszą sumę wszystkich swoich krawędzi?
12. Porównaj ułamki: a) $\dfrac{2277}{3366}$ i $\dfrac{2727}{3636}$; b) $\dfrac{222444}{666888}$ i $\dfrac{242424}{686868}$.
13. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym połączono odcinkami wszystkie pary wierzchołków. Odcinki, które zawierają się w którejś podstawie lub ścianie bocznej, są niebieskie. Odcinki, które nie zawierają się ani w żadnej podstawie, ani w żadnej ścianie bocznej, są czerwone. Ile jest odcinków czerwonych, a ile niebieskich?
14. Rozważamy różne prostopadłościany o objętości 72 jednostek sześciennych i takie, których wszystkie krawędzie mają długości wyrażające się przez liczby całkowite jednostek. Mamy do dyspozycji drut długości 60 jednostek. Podaj wymiary wszystkich prostopadłościanów o podanych własnościach i takich, dla których wystarczy drutu, by wykonać z niego ich szkielet.



15. W sześciennym klocku o krawędziach długości 5, sklejonym z identycznych sześcianików o krawędziach długości 1, wydrążono „tunele” prostopadłe do ścian. Kształty przekrojów „tuneli” widoczne są na rysunku. Ile kostek jednostkowych wyjęto?
16. Wyróżnionymi punktami sześcianu są środki wszystkich jego krawędzi. Połączono odcinkami wszystkie możliwe pary wyróżnionych punktów. Ile z tych odcinków nie zawiera się w żadnej ścianie sześcianu?

17. Rozważamy wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe, w których zapisie pojawiają się tylko cyfry 4, 7 i 8. Wśród nich znajdują się także liczby zapisane tylko przy pomocy jednej z podanych cyfr oraz liczby utworzone przy pomocy dokładnie dwóch cyfr z trzech podanych. Ile jest liczb podzielnych przez 36 wśród wszystkich utworzonych w ten sposób liczb czterocyfrowych? Wypisz te liczby.
18. Cenę pewnego towaru zwiększono najpierw o 8%, potem tę nową cenę podwyższono o 30 zł, a po jakimś czasie tę ostatnią cenę obniżono o 20%. Cena końcowa wyniosła 240 zł. Ile kosztował towar na początku? O ile procent cena końcowa była niższa od ceny początkowej?
19. Cenę pewnego towaru podwyższono w okresie świątecznym o 10%, a później dwukrotnie obniżono, najpierw o 10%, a potem jeszcze o 20%. Po wszystkich zmianach towar kosztował 990 zł. Oblicz początkową cenę towaru. Jaki procent najwyższej ceny towaru stanowi cena końcowa?
20. Wyróżnionymi punktami graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego są wszystkie jego wierzchołki oraz środki wszystkich jego krawędzi bocznych. Połączono odcinkami wszystkie możliwe pary wyróżnionych punktów. Ile jest odcinków, które nie zawierają się w żadnej ścianie tego graniastosłupa?
21. Rozważamy wszystkie możliwe prostopadłościany o objętości 36 cm^3, których krawędzie mają długości wyrażone przez całkowite liczby centymetrów.

    a) Ile jest wśród nich prostopadłościanów o istotnie różniących się wymiarach? Podaj ich wymiary. (Nie różnią się istotnie dwa prostopadłościany o wymiarach z tylko przestawioną kolejnością, np. $5 \times 4 \times 9$ i $5 \times 9 \times 4$.)

    b) Czy wśród nich istnieje para prostopadłościanów o tej własności, że pole powierzchni całkowitej jednego z nich jest co najmniej dwukrotnie większe od pola powierzchni całkowitej drugiego?
22. Każdą z podanych liczb wymiernych, zapisanych przy pomocy nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego, zapisz w postaci ułamka zwykłego: a) 0,7(3); b) 0,(134); c) 0,222(13); d) 0,(2002); e) 0,23(114).
23. Oblicz:

a) $$\frac{2-\frac{13}{17}:\left(1\frac{3}{17}-0{,}024:0{,}03\right)}{\frac{1}{2}-\frac{1}{0{,}8}:\frac{1}{0{,}6}}$$

b) $$\frac{4{,}45+0{,}55:(1\frac{2}{9})}{\frac{2}{0{,}5-0{,}1(6)}+[(3{,}1)^2-(2{,}1)^2]:1{,}3}:0{,}07$$

c) $$\frac{(5{,}8-2{,}8:0{,}35):(-0{,}2)^2}{2\frac{1}{3}-\frac{1}{1{,}8}\cdot 0{,}4}\cdot 0{,}3(45)$$

d) $$8\frac{1}{7}:\left[\frac{-\frac{2}{3}\cdot 8+\frac{1}{7}}{-\frac{2}{3}\cdot 7+\frac{1}{8}}-\frac{8\frac{1}{8}+6\frac{7}{8}\cdot 0{,}2}{7\frac{1}{7}+\frac{6}{7}:0{,}(36)}\right]$$

e) $$\frac{\left(6{,}75-4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}\right)\cdot 0{,}(6)}{\left[6\frac{2}{3}\cdot 0{,}15-\left(0{,}25-\frac{11}{12}\right)\right]:2\frac{2}{3}}$$

f) $$\frac{\left((0{,}6)^2+\frac{\frac{3}{5}\cdot 2{,}2}{0{,}9-\frac{2}{5}}\right)\cdot 0{,}(2013)}{1{,}6-\frac{1{,}4+\frac{4}{5}}{2}}-(1-0{,}08:0{,}101).$$

24. Oblicz:

a) $$\frac{142\cdot 312+284\cdot 44}{160\cdot 30-16\cdot 150}$$

b) $$\frac{685\cdot 654654}{327\cdot 137137+137\cdot 327327}$$

c) $$\frac{(9191)^2-4\cdot 6363\cdot 2828}{2525\cdot 4949}$$

d) $$\frac{20\cdot 151515+202020\cdot 15}{65\cdot 313131+656565\cdot 31}\cdot 2015$$

e) $$\frac{81\cdot 3636}{6363\cdot 864-5454\cdot 468}$$

f) $$\frac{11\cdot 9494\cdot 11}{3344\cdot 55+4455\cdot 33+5533\cdot 44}$$

25. Czy liczba 666 . . . 6, w której cyfra 6 powtarza się 2020 razy jest kwadratem liczby naturalnej?
26. Uzasadnij, że żadna liczba naturalna posiadająca w swym zapisie dokładnie trzy zera na końcu nie jest kwadratem liczby naturalnej.
27. Wskaż wszystkie pary cyfr x, y o tej własności, że po wstawieniu ich do zapisu liczby naturalnej $\overline{42x314y}$ otrzymamy liczbę podzielną przez 5, (4, 6, 8, 12, 15, 30, . . .).
28. Rozważamy liczbę $a = 16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 30$.

    (a) Iloma zerami kończy się zapis dziesiętny tej liczby?

    (b) Czy liczba a dzieli się przez 15, 21, 33, 56, 63, 63, 81, 126, 250 ?

    (c) Przez jaką najwyższą potęgę liczby 2 dzieli się liczba a?
29. Czy liczba $b = 231 \cdot 132 + 891 \cdot 198$ jest podzielna przez 6, 10, 11, 12, 33, 44, 63, 121, 125 ?
30. Ile trzycyfrowych bloków liczb 254 trzeba zapisać obok siebie, by ich łączny zapis utworzył liczbę podzielną przez 33?

Uwaga I W przygotowaniach do I spotkania drugiego etapu można wykorzystać zbiory zadań: *Liga Zadaniowa*, str. 15-16 (zad. 8-102), str. 25-29 (zad. 1-12, 14-51); *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, str. 11-13 (zad. 14-18); str. 42-45 (zad. 195-227), str. 46-48 (zad. 228-253); str. 54-56 (zad. 316-357); str. 29-31 (zad. 104, 105, 107, 110, 115-119) *Koło matematyczne w szkole podstawowej*, str. 121-131, 173-174; *Koło matematyczne w gimnazjum*, rozdziały: Liczby, Podzielność liczb, Procenty.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki: *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zadania: 31, 121, 140, 141, 150, 221, 225, 233, 271, 278.

Uwaga II: W soboty, począwszy od 12 października, o godzinie 10:30 na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, ul. Chopina 12/18, odbywać się będą zajęcia koła matematycznego dla uczniów klas VII (lub młodszych) o tematyce związanej z „Ligą Zadaniową”. Harmonogram zajęć można znaleźć na stronie Ligi Zadaniowej http://liga.mat.umk.pl

Serdecznie zapraszamy.