

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie Klasa VII szkoły podstawowej
Zadania przygotowawcze do II spotkania etapu rejonowego w dniu 8 lutego 2025 r.

- Tematyka:** 1. Obliczanie pól wielokątów. 4. Kąty wierzchołkowe, naprzemianległe, przyległe i odpowiadające. 5. Kąty zewnętrzne i wewnętrzne różnych wielokątów.
2. Układ współrzędnych.
3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

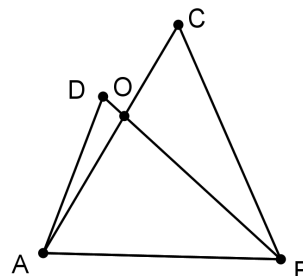
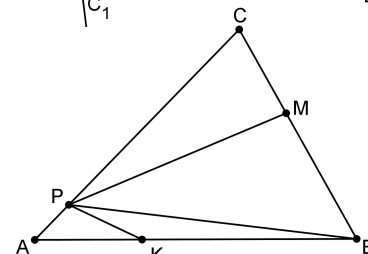
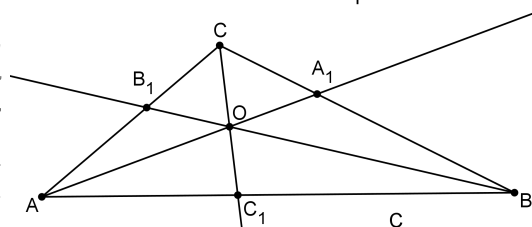
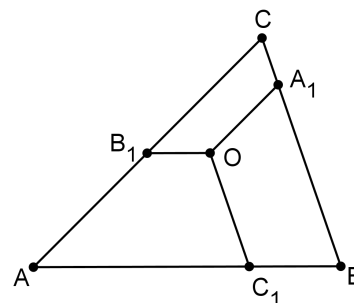
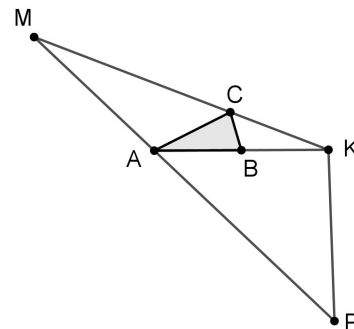
1. Uzupełnij kwadrat magiczny

		$-2x + 5$
	$-x + 4$	
		$3x - 8$

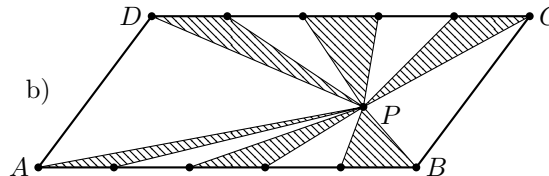
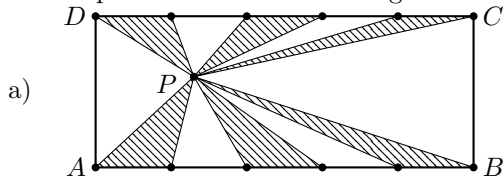
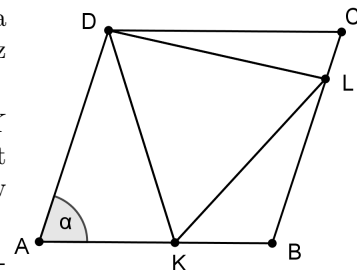
$-2a$		
$-4a + 2b$		
$3a + 4b$		

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y$		
	$-x - \frac{1}{4}y$	$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}y$

2. Rozważamy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (8, 13)$; $B = (-4, 7)$; $C = (-2, -3)$; $D = (6, -5)$. Punkt S jest środkiem odcinka AB . Oblicz pole trójkąta CDS .
3. Trójkąt ABC jest równoramienny, przy czym $|AC| = |BC|$. Punkt D należy do ramienia BC i $|AD| = |DC|$. Miary kątów BAD i DAC pozostają w stosunku 3 : 2. Oblicz miary kątów trójkątów BDA i DCA .
4. Dla liczb a i b określamy operacje: $a \triangle b = -a + b - 5$ oraz $a \square b = a \cdot b - a$.
 Rozważamy liczby: $M = (2024 \triangle 2023) \square (2023 \triangle 2024)$ i $N = [(2 \triangle 0) \square 2] \triangle 4$.
 Oblicz $\frac{M}{N}$.
5. Dany jest trójkąt ABC . Punkt K leży na prostej AB i $|BK| = |AB|$. Punkt M leży na prostej KC oraz $|MC| = 2 \cdot |CK|$. Ponadto punkt P leży na prostej MA i $|PA| = 1,5 \cdot |MA|$. Oblicz pole trójkąta KMP wiedząc, że pole trójkąta ABC jest równe S .
6. W trapezie $ABCD$ kąty przy dłuższej podstawie AB mają miary 50° i 70° . Poprowadzono dwusieczne kątów **zewnętrznych** tego trapezu: dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach A i B przecięły się w punkcie K ; dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach B i C przecięły się w punkcie L ; dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach C i D przecięły się w punkcie M ; dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach D i A przecięły się w punkcie N . Oblicz miary kątów **wewnętrznych** czworokąta $KLMN$.
7. Punkt O należy do wnętrza trójkąta ABC . Punkt A_1 należy do boku BC i odcinek OA_1 jest równoległy do boku CA . Punkt B_1 należy do boku CA i odcinek OB_1 jest równoległy do boku AB . Punkt C_1 należy do boku AB i odcinek OC_1 jest równoległy do boku BC . Miary kątów A_1OB_1 , B_1OC_1 i C_1OA_1 pozostają w stosunku 11 : 12 : 13. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC .
8. W trójkącie ABC miara kąta CAB jest równa 40° , a miara kąta ABC jest równa 20° . Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie A_1 , dwusieczna kąta ABC przecina bok CA w punkcie B_1 , dwusieczna kąta BCA przecina bok AB w punkcie C_1 . Wszystkie trzy dwusieczne przecinają się w punkcie O i rozcinają trójkąt ABC na sześć „małych” trójkątów. Wśród trójkątów „małych” oraz trójkątów złożonych z dwóch lub trzech „małych” trójkątów wskaż parę trójkątów, które mają taki sam zestaw miar kątów wewnętrznych.
9. Dane są trzy punkty: $A = (-5, 2)$, $X = (-1, -3)$ i $Y = (-1, 6)$. Punkt X jest środkiem odcinka AB , punkt C jest środkiem odcinka BY . Podaj współrzędne punktów B i C . Zbadaj, który z trójkątów ma większe pole, trójkąt AXY , czy trójkąt ABC .
10. Punkt K należy do boku AB trójkąta ABC i długości odcinków AK i KB pozostają w stosunku 1 : 2. Punkt M należy do boku BC tego trójkąta i długości odcinków BM i MC pozostają w stosunku 3 : 2. Punkt P należy do boku CA tego trójkąta i długości odcinków CP i PA pozostają w stosunku 5 : 1. Pole trójkąta AKP jest równe 2. Oblicz pola trójkątów KBP , BMP i MCP .
11. Oblicz pole czworokąta $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-4, 3)$, $B = (6, -5)$, $C = (4, 6)$, $D = (1, 3)$.
12. Punkty C , D znajdują się po tej samej prostej AB . Trójkąt ABC jest równoramienny i $|AC| = |BC|$. Trójkąt ABD jest równoramienny i $|AB| = |BD|$. Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie O . Oblicz miarę kąta AOB , wiedząc, że miara kąta ACB jest równa 40° , a miara kąta ADB jest równa 80° .
13. Dla liczb a i b określamy operacje: $a \triangle b = a + b - 4$ oraz $a \square b = 3a + 4b$.
- a) Oblicz $32 \triangle 8$, $(-6) \triangle 11$, $13 \square 7$, $(-4) \square (-10)$, $(4 \square 11) \triangle (20 \square 13)$, $(-2) \square [(-3) \triangle (4 \square 5)]$;
- b) Wykonaj operacje: $(3 \square x) \triangle (-2)$, $4 \square (x \triangle 2)$, $(4x - 1) \triangle (x - 2)$, $(1 - 2x) \triangle [3x \square (-2)]$.



14. Dany jest trójkąt ABC . Punkt D należy do boku AB i $|DB| = 7 \cdot |AD|$. Punkt E należy do boku BC i $|EC| = 6 \cdot |BE|$. Punkt F należy do odcinka CD i $|FD| = 5 \cdot |CF|$. Z trójkąta ABC odcięto kolejno trójkąty ACD, BDE, CEF . Pole trójkąta DEF jest równe 60. Oblicz pole trójkąta ABC . Który z odciętych trójkątów ma największe pole?
15. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem o kącie ostrym DAB równym α . Punkt K należy do boku AB i $|AD| = |KD|$. Punkt L należy do boku BC i trójkąt DKL jest równoboczny. Odcinki DL i BC są prostopadłe. Oblicz miarę kąta α oraz miary kątów trójkąta KBL .
16. Punkty: a) $(-3, 6), (-3, -4), (2, 3)$; b) $(-3, 0), (3, -1), (2, 4)$; są wierzchołkami równoległoboku. Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka. Rozważ wszystkie możliwe przypadki. Oblicz pole każdego z równoległoboków.
17. Punkty $A = (-2, 4), B = (4, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , którego pole jest równe 24. Znajdź współrzędne punktu C , wiedząc, że a) odcięta punktu C jest równa -3 ; b) trójkąt ABC jest równoramienny; c) trójkąt ABC jest prostokątny; d) trójkąt ABC jest ostrokątny.
18. Rozwiąż zadanie analogiczne do Zadania 6. w przypadku, gdy czworokąt jest $ABCD$ jest a) prostokątem, b) równoległobokiem o ostrym kącie α , c) trapezem równoramiennym o kącie α przy dłuższej podstawie, d) miary kątów wewnętrznych DAB, ABC, BCD oraz CDA pozostają w stosunku $3 : 5 : 7 : 5$.
19. Obwód prostokąta jest równy 360 cm. Dwusieczna jednego z kątów wewnętrznych dzieli dłuższy bok prostokąta w stosunku $2 : 5$. Oblicz długości boków prostokąta oraz iloraz pól figur, na które dwusieczna ta rozcięła prostokąt. Rozpatrz wszystkie przypadki.
20. Punkt D należy do boku AB trójkąta ABC i jest różny od punktów A i B . Uzasadnij, że iloraz pól trójkątów ACD i DCB jest równy ilorazowi długości odcinków AD i DB .
21. Punkt E należy do boku AB równoległoboku $ABCD$ i nie jest wierzchołkiem tego równoległoboku. Prosta DE przecina przekątną AC w punkcie X . Uzasadnij, że pola trójkątów AXD i EXC są równe.
22. Miary **zewnątrznych** kątów trójkąta pozostają w proporcji $4 : 3 : 2$. Znajdź miarę kąta między dwusiecznymi wychodzącymi z wierzchołków mniejszych kątów **wewnętrznych** tego trójkąta.
23. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Przekątna AC dzieli ten czworokąt na trójkąty ACB i ACD . Uzasadnij, że iloraz wysokości BB_1 trójkąta ACB i wysokości DD_1 trójkąta ACD jest równy ilorazowi pól trójkątów ACB i ACD .
24. Równoległobok $ABCD$ ma pole równe 60. Punkt E należy do boku AB i $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{2}$. Punkt F należy do boku BC i $\frac{|CF|}{|FB|} = \frac{2}{3}$. Oblicz pole trójkąta DEF .
25. Środki przeciwległych boków czworokąta wypukłego $ABCD$ połączono odcinkami, tworząc cztery czworokąty. Pole „małego” czworokąta zawierającego punkt A ma pole P_A , podobnie pole „małego” czworokąta zawierającego punkt B jest równe P_B , a pole „małego” czworokąta zawierającego punkt C jest równe P_C . Oblicz pole czwartego „małego” czworokąta.
26. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano dwa punkty D i E takie, że $|AC| = |AD|$ i $|BC| = |BE|$. Oblicz miarę kąta $\angle DCE$.
27. Na okręgu o środku O znajdują się punkty $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ o tej własności, że kąty $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \dots, \angle A_9OA_{10}, \angle A_{10}OA_1$ mają miarę 36° . Punkty te są wierzchołkami dziesięciokąta $A_1A_2A_3 \dots A_{10}$. Oblicz miary kątów przecięcia się przekątnych:
- a) A_1A_3 i A_2A_4 ; b) A_1A_3 i A_2A_5 ; c) A_1A_3 i A_2A_6 .
28. Boki AB i CD prostokąta $ABCD$ (równoległoboku $ABCD$) podzielono na 5 równych odcinków. Punkt P jest dowolnym ustalonym punktem należącym do prostokąta $ABCD$ (równoległoboku $ABCD$). Jaką część pola prostokąta (równoległoboku) stanowi pole obszaru zamalowanego?



Uwaga W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań: *Liga Zadaniowa*, str. 69-73 (zad. 1-29, 34, 36, 45, 46, 48), str. 79-87 (zad. 101, 125, 126, 128, 130, 131, 141, 142, 163, 168, 169, 172-178, 182, 183); *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 47-52, 370-457, 534-556; *Koło matematyczne w szkole podstawowej*, str. 145-166; *Koło matematyczne w gimnazjum*, rozdziały: Kąty, Pola i obwody.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 47 bde, 52, 391, 406, 409, 411, 424, 428, 435.

Uwaga II W soboty, począwszy od 12 października, o godzinie 10:30 na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, ul. Chopina 12/18, odbywają się zajęcia koła matematycznego dla uczniów klas VII (lub młodszych) o tematyce związanej z „Ligą Zadaniową”. Harmonogram zajęć można znaleźć na stronie Ligi Zadaniowej <https://liga.mat.umk.pl/> Serdecznie zapraszamy.