Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki

Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa VII szkoły podstawowej

Zadania przygotowawcze do III spotkania drugiego etapu w dniu 29 marca 2025 r.

Tematyka: 1. Zadania logiczne. 2. Przekształcanie wzorów. 3. Równania w zadaniach tekstowych. 4. Potęgi i pierwiastki.

1. Liczba n jest **najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią** o tej własności, że liczba $A = 2024 \cdot 2025 \cdot n$ jest kwadratem pewnej liczby całkowitej dodatniej b. Wskaż liczby n i b. Podaj uzasadnienie swego wyboru.

2. Uzasadnij, że liczba $B = 2 \cdot 7^{10} + 3 \cdot 7^9 + 2 \cdot 7^8$ jest podzielna przez liczbę 11.

3. Wiedząc, że $\dfrac{5x+2y}{3y} = -6$, oblicz $\dfrac{x^2-y^2}{0{,}75 \cdot x \cdot y}$.

4. Oblicz: $$\frac{\sqrt{23^2 + 2 \cdot \sqrt{13^2+360} + 1^2}}{\sqrt[3]{7^3 - 2 \cdot \sqrt[3]{16 \cdot 64 \cdot 256} - (-1)^3}}$$

5. Każdy z dwóch chłopców, Adam i Bartek, ma pewną sumę pieniędzy. Adam mówi do Bartka: – *Gdybyś mi dał czwartą część swoich pieniędzy, miałbym dwa razy więcej pieniędzy od ciebie.* Bartek odpowiada: – *Masz rację. A w dodatku, gdybym po dokonaniu takiej darowizny otrzymał od ciebie 18 złotych, to każdy z nas miałby taką samą sumę pieniędzy.* Ile pieniędzy ma każdy z chłopców?

6. Styczniowe wydatki Julii wyniosły 300 zł. Średnia wydatków Julii z dwóch miesięcy: stycznia i lutego, była **o** 20% **większa** od wydatków styczniowych. Średnia wydatków Julii z trzech miesięcy: stycznia, lutego i marca, okazała się **o** 20% **mniejsza** od średniej wydatków ze stycznia i lutego. Jaki procent wydatków styczniowych Julii stanowiły jej wydatki z lutego, a jaki – jej wydatki z marca?

7. Przez jaką największą potęgę liczby 3 podzielna jest liczba $m = (9^{27} - 27^9) \cdot (3^9 - 9^3)$?

8. W trzech skrzynkach, żółtej, srebrnej i brązowej, znajdują się dukaty. W srebrnej jest 80 dukatów, w złotej o 20% mniej niż w srebrnej, a liczby dukatów w skrzynce brązowej nie znamy. Gdyby ze złotej skrzynki przenieść do srebrnej czwartą część zawartości złotej skrzynki, następnie ze srebrnej skrzynki przenieść do skrzynki brązowej czwartą część (powiększonej) zawartości srebrnej skrzynki i wreszcie ze skrzynki brązowej przenieść czwartą część (powiększonej) zawartości tej skrzynki do skrzynki złotej, to w każdej z tych trzech skrzynek byłaby taka sama liczba dukatów. Ile jest dukatów w skrzynce złotej, a ile w brązowej?

9. Ośmiu zawodników z numerami od 1 do 8 rozdzielamy na dwie drużyny, z których każda liczy czterech członków. W drużynie A kapitanem jest zawodnik z numerem 1, w drużynie B kapitanem jest zawodnik z numerem 2. Na ile sposobów można utworzyć drużyny A i B w taki sposób, aby w każdej z nich dokładnie dwie osoby miały numery nieparzyste? Ile wśród tych par drużyn jest par o tej własności,że suma numerów zawodników w każdej z drużyn jest dodatkowo podzielna przez liczbę 3? Wypisz te pary.

10. Pomidory zawierają 95% wody. Ile trzeba wziąć pomidorów, aby otrzymać z nich w procesie suszenia cztery kilogramy suszonych pomidorów, które zawierają 15% wody?

11. Przy okrągłym stole siada 5 osób: Ala, Bartek, Celina, Danka i Emil. Miejsca są ponumerowane liczbami od 1 do 5, zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Na miejscu z numerem 1 usiadła Ala. Na ile sposobów mogą usiąść pozostałe osoby, zachowując następujące reguły: **każda para sąsiadów ma imiona zaczynające się od liter, które NIE WYSTĘPUJĄ OBOK SIEBIE W ALFABECIE**?

12. Przez jakie najmniejsze liczby całkowite dodatnie należy przemnożyć liczby $A = 2016$, $B = 765 \cdot 56 \cdot 7$, aby otrzymać kwadrat (sześcian, czwartą potęgę, ...) liczby naturalnej?

13. Jeżeli w pewnej liczbie dwucyfrowej zamienimy kolejność cyfr, to otrzymamy liczbę o 75% większą od pierwszej. Znajdź wszystkie liczby o tej własności.

14. Ze wzoru $c = \dfrac{3a+b}{2a+5b}$ wyznacz zmienną a, a następnie oblicz wartość a^7, gdy $b = (-0,75)^2$ i $c = -3$.

15. Mały dźwig przeładowuje pewną ilość towaru w ciągu 12 godzin. Tę samą ilość towaru średni dźwig przeładowuje w ciągu 8 godzin, a duży dźwig w ciągu 5 godzin. Wspomnianą ilość towaru przez 2 godziny przeładowywały równocześnie dźwigi: mały i średni. Czy wystarczy dodatkowych 2 godzin na to, by przeładunek dokończyły dźwigi: średni i duży, podczas gdy mały dźwig zostanie wyłączony z pracy?

16. Do podwieczorku urodzinowego dwóch bliźniaczek zasiadły obie jubilatki wraz z czworgiem gości. Średni wiek wszystkich uczestników podwieczorku był równy 18 lat. Gdy jubilatki wyszły na chwilę z pokoju, by otworzyć drzwi spóźnionym gościom, średnia wieku czterech osób pozostałych w pokoju była równa 22 lata. W jakim wieku były bliźniaczki?

17. Ze wzoru wyznacz zmienną a: a) $S=\dfrac{a+b}{2}\cdot h$, b) $P=2ab+2ac+2bc$, c) $S=\dfrac{\frac{a+b}{2}+c}{2}$,
d) $t=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, e) $x=\dfrac{a+3}{a+1}$, f) $c=\dfrac{a\cdot b}{a+b}$, g) $c=\dfrac{3a+b}{\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b}$.

18. Wiedząc, że $\dfrac{a-4b}{b}=7$, oblicz: a) $\dfrac{2a+3b}{a}$, b) $\dfrac{a^2-4ab-16b^2}{a^2+b^2}$, c) $\dfrac{(a+2b)^2-(2a-3b)^2}{(5b-a)^2}$.

19. Wiedząc, że $a^2=a+1$, uzasadnij, że $a^3=2a+1$, $a^4=3a+2$, $a^5=5a+3$.

20. Pociąg, jadąc ze stałą prędkością, przejeżdża przez most długości 450 m w ciągu 45 sekund. Jadąc z tą samą prędkością, w ciągu 15 sekund pociąg ten mija słup telegraficzny. Jaka jest długość pociągu i jaka jest jego prędkość w km/godz?

21. Andrzej jest **lżejszy** o 20% od Bartka, Bartek jest **cięższy** o 10% od Radka. Najlżejszy z chłopców waży 44 kg. Ustaw chłopców w kolejności od najlżejszego do najcięższego i podaj, ile waży każdy z nich.

22. Brat i siostra otrzymali od rodziców pewną ilość pieniędzy. Jeśli siostra odda bratu 20% swojej części, to brat będzie miał o 50% więcej pieniędzy niż siostra. Które dziecko otrzymało od rodziców więcej pieniędzy?

23. Oblicz: a) $\dfrac{4\cdot 2^{20}+\frac{1}{4}\cdot 8^8+2\cdot 4^{11}}{2^{22}+4\cdot 16^5}$, b) $\dfrac{8^3\cdot 6^5}{8\cdot 6^8-6\cdot 12^5}$, c) $\dfrac{(3^2+5^2+6^2)^7}{(7^6+7^8)(3\cdot 5^5+5^7)}$, d) $\dfrac{5\cdot 4^{15}\cdot 9^9-4\cdot 3^{20}\cdot 8^9}{5\cdot 2^9\cdot 6^{19}-7\cdot 2^{29}\cdot 27^6}$,
e) $\dfrac{2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}}$, f) $\dfrac{10^{42}\cdot 7^{41}-10\cdot 5^{43}\cdot 14^{40}}{2^{42}\cdot 35^{40}+10^{40}\cdot 7^{41}}$, g) $\dfrac{4^6\cdot 5^{12}+2^5\cdot 10^{10}}{40^4\cdot 25^3-100^5}$, h) $\dfrac{48^4\cdot 9^8}{18^4\cdot 12^8+72^4\cdot 6^8}:\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$.

24. W każdej z podanych par liczb wskaż liczbę większą: a) $(1{,}5)^{64}$ i 6^{16}, b) 81^{64} i 4^{192}, c) 25^{27} i 8^{42}.

25. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej: 2^{90}, 3^{60}, 5^{45}, 8^{45}, 16^{30}.

26. W każdej z podanych par liczb wskaż liczbę mniejszą: a) $1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot 9^9\cdot 10^{10}$ i 10^{55}, b) 10^{55} i 2^{200}.

27. Uzasadnij, że liczba n jest podzielna przez liczbę k :
a) $n=7^{2020}-7^{2018}$ i $k=3$, b) $n=3^{80}+3^{82}+3^{84}+3^{86}$ i $k=41$. c) $n=4^{20}+4^{22}+4^{24}$ i $k=13$.

28. Podaj przynajmniej 2 pary liczb całkowitych dodatnich m i n takich, że $2\cdot n^3=m^4$.

29. Podaj cyfrę jedności liczb: 2^{100}, 3^{531}, 27^{345}, $234^{567}\cdot 567^{890}$, $2^{2018}+3^{2019}+4^{2020}$, $9^{888}+7^{666}\cdot 4^{333}$.

30. Wypisz wszystkie dzielniki dodatnie podanych liczb: 3^5, 2^8, 7^{15}, 6^2, 15^3, $2^5\cdot 3$, $3^4\cdot 5^2$, $2^4\cdot 7^3$, $7^3\cdot 11\cdot 13^2$.

31. Ile różnych dzielników dodatnich ma każda z podanych liczb: $2^3\cdot 3^4\cdot 5^7$, $12^3\cdot 14^4$, $33^4\cdot 34^3\cdot 35^2\cdot 36$, $6^{12}\cdot 4^{10}+6^{11}\cdot 4^{11}+6^{10}\cdot 4^{12}$?

32. Oblicz: a) $\sqrt[4]{5\cdot\sqrt[3]{729}+9\cdot\sqrt[3]{64}}-\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{625}+4\cdot\sqrt[4]{81}}$, b) $\left(3\sqrt[3]{56}+2\sqrt[3]{189}-2\sqrt[3]{25\cdot 35}\right)^3$, c) $\dfrac{(\sqrt{6})^5\cdot(\sqrt[3]{18})^6}{(\sqrt{8})^3\cdot(\sqrt[3]{9})^{12}}\cdot\sqrt{3}$,
d) $\dfrac{\sqrt{7\cdot\sqrt{676}-4\cdot\sqrt[3]{343}+2\cdot\sqrt{121}}\cdot\sqrt{\dfrac{(11-\sqrt{11})\cdot(11+\sqrt{11})}{10}}}{(-\sqrt[4]{121})^2}$, e) $\dfrac{10\sqrt{1+10\sqrt{64}}}{\sqrt[3]{444-101}+\sqrt[3]{4\sqrt{144}-\sqrt{441}}}$,
f) $\dfrac{[3\cdot(\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{4}+1)]^2}{(\sqrt{5})^4\cdot[(\sqrt{2})^6+1]}$, g) $\dfrac{\sqrt[4]{7\cdot\sqrt[3]{27}+15\cdot\sqrt[3]{64}}}{\sqrt[3]{36\cdot\sqrt[4]{48\cdot 27}}}\cdot(2\sqrt{3})^2$, h) $\dfrac{\sqrt{5\cdot\sqrt{121}+2\cdot\sqrt[3]{343}-5\cdot\sqrt[4]{256}}}{\sqrt{300}-\sqrt{108}+3\cdot\sqrt{3}}\cdot(-\sqrt{3})^3$.

33. Porównaj liczby: a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{125}+120}+120}$ i $\sqrt{2\cdot\sqrt{256}-3\cdot\sqrt[4]{256}+4\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{2+5-6}}}$; b) $\sqrt[3]{\dfrac{2020}{2021}}$ i $\sqrt[3]{\dfrac{2019}{2020}}$;
c) $\sqrt{2\cdot 4^5+2^{11}}$ i 2^6; d) $\sqrt{2}$ i $\sqrt[3]{3}$; e) $\sqrt[4]{3}$ i $\sqrt[5]{4}$.

Uwaga. W przygotowaniach do III spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań:
– *Liga Zadaniowa*, str. 32-33 (zad. 82-100), str. 46-68, str.157 (zad. 21);
– *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 19-23, 27, 29, 30, 37-39, 42-46, 53-61, 99-153, 295-296, 313-315, 593, 594, 598, 605, 607, 609, 614, 619;
– *Koło matematyczne w szkole podstawowej*, rozdziały: Logika, Prędkość, droga, czas, Równania, Zadania o wieku;
– *Koło matematyczne w gimnazjum*, rozdziały: Równania i nierówności, Procenty, Zadania logiczne.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki
Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego, zadania 120, 126, 128, 149, 152, 156, 170, 188, 234, 271.

Uwaga II. W soboty, począwszy od 12 października, w godz. 10:30 - 12:00, na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu, ul. Chopina 12/18, odbywają się zajęcia koła matematycznego dla uczniów klas VII (lub młodszych) o tematyce związanej z „Ligą Zadaniową". Harmonogram zajęć można znaleźć na stronie Ligi Zadaniowej https://liga.mat.umk.pl . Serdecznie zapraszamy.