

Klasa II gimnazjum
Zadania przygotowawcze na II spotkanie konkursowe w dniu 9.01.2010 r.

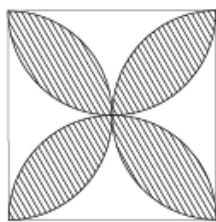
1. Oblicz pole i obwód zakreskowanej figury na rysunku 1, gdzie długość boku kwadratu jest równa 6 cm, a łuki są odpowiednio półokręgami.
2. Czy liczba $2^{30} + 5^{40}$ jest liczbą pierwszą?
3. Czy liczba $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right)$ jest liczbą pierwszą?
4. Oblicz pola figur F_1, F_2, F_3, F_4 jeżeli trójkąt ABC jest prostokątny i równoramienny o przyprostokątnych długości 6 cm, a łuki CA i AB są półokręgami, zaś łuk CB jest ćwiartką okręgu o środku A (rysunek 2).
5. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}} : \frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab} \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}$,
a następnie obliczyć jego wartość dla $a = \sqrt{5} - 1$ i $b = 1 + \sqrt{5}$.
6. Oblicz pole i obwód zacieniowanych półksiężyców na rysunku 3 wiedząc, że długość boku kwadratu wynosi 8 cm, zaś zewnętrzne łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach kwadratu, a wewnętrzny łuk jest okręgiem opisanym na kwadracie.
7. Czy liczba $3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{2007}\right)$ jest liczbą pierwszą?
8. Oblicz pole i obwód zacieniowanej figury na rysunku 4.
9. Czy $4^{101} + 5^{2008}$ jest liczbą pierwszą?
10. Pewna liczba naturalna n przy dzieleniu przez 2007 i 2008 daje tę samą resztę równą 1000. Jaką resztę otrzymamy dzieląc tę liczbę przez 12?
11. Udowodnij, że dla dowolnych rzeczywistych liczb a, b takich, że $a \cdot b < 0$ zachodzi nierówność: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$. Pokaż, kiedy zachodzi równość.
12. Dane wyrażenia algebraiczne doprowadź do najprostszej postaci a następnie policz ich wartości dla podanych wartości zmiennych:
 - a. $\left[\left(a + \frac{ab}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{ab}{a+b} - a\right)\right] : \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, \quad a = \frac{-4}{5}, b = 0,6.$
 - b. $\left(x + y - \frac{4xy}{x+y}\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} + \frac{2xy}{x^2-y^2}\right) \quad x = 0,6, y = -0,4$
 - c. $\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1\right) \cdot \frac{4ab}{a^2+b^2} \quad a = \frac{2}{5}, b = 0,375$
13. W kwadracie $ABCD$ poprowadzono dwa okręgi o środkach w wierzchołkach A i B i promieniu równym bokowi kwadratu. Okręgi te podzieliły kwadrat na cztery obszary. Oblicz pola i obwody tych obszarów, jeśli długość boku kwadratu jest równa 5 cm.
14. Oblicz:
 - a. $(4 + \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot (4 - \sqrt{15}),$

b. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}}\right) \cdot (\sqrt{3}+5)^{-1}$.

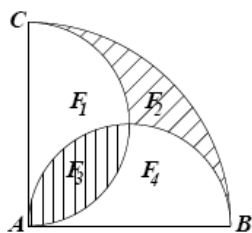
15. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a. $\frac{1}{b(abc+a+c)} - \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}} + \frac{1}{a+\frac{1}{b}}$,

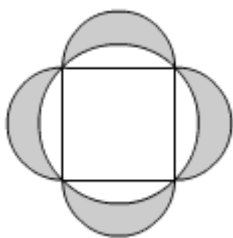
b. $\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}} : \frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab} \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}$.



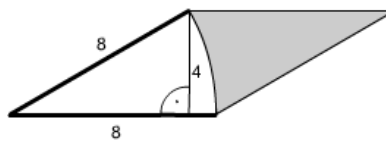
Rysunek 1



Rysunek 2



Rysunek 3



Rysunek 4

Uwaga:

W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać zbiór zadań "Liga Zadaniowa?" - strony 51-87, 276-310.