

LIGA ZADANIOWA UMK W TORUNIU
ZADANIA W ROKU SZKOLNYM 2009/2010

Zadania niespodzianki
dla uczniów klas II gimnazjum
na zakończenie konkursu 2009/2010

1. Udowodnić, że jeśli p jest liczbą pierwszą większą niż 1000, to można w jej zapisie wykreślić jedną lub dwie cyfry tak, aby otrzymać liczbę pierwszą.
2. Zapis dziesiętny liczby $5 \cdot A$ składa się z 100 piątek i 100 szóstek. Znaleźć sumę cyfr liczby A .
3. Na tablicy zapisano 9 kolejnych liczb trzycyfrowych, w zapisie których nie występuje cyfra 0. W każdej liczbie obliczono iloczyn cyfr, a następnie iloczyny te zsumowano. Czy jest możliwe aby suma tych iloczynów była równa 1125?
4. Liczba sześciocyfrowa dzieli się przez 8. Jaką największą sumę cyfr może ona mieć?
5. W trójkącie ABC poprowadzono środkową AM i wysokość BH . Obliczyć $|BC|$, jeśli wiadomo, że $|AH| = 1$ i $2|AMAC| = |MCA|$.
6. Czy można z prostokątów $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times 13$ złożyć prostokąt?
7. Mamy 1001 jednakowo wyglądających monet. Wiadomo, że wśród nich jest tylko jedna fałszywa - ma inną wagę od pozostałych. Wyjaśnij przy pomocy dwóch ważeń na wadze szalkowej bez odważników czy moneta fałszywa jest cięższa czy lżejsza od pozostałych monet.
8. Piotr, Zbyszek i Mirek mają łącznie 100 zadań z pewnego zestawu, przy czym każdy z nich rozwiązał 60 zadań. Zadanie uważamy za "trudne" jeżeli rozwiązał je tylko jeden z chłopców, natomiast zadanie uważamy za "łatwe" jeżeli rozwiązali je wszyscy chłopcy. Pozostałe rozwiązane zadania uważamy za "średnie". Uzasadnij, że zadań trudnych było o 20 więcej niż zadań łatwych.
9. Na okręgu mamy 10 punktów. Na zmianę każdy z dwóch chłopców łączy dwa punkty spośród danych odcinkiem. Który z chłopców może zapewnić sobie wygraną, jeśli nie wolno tych samych punktów łączyć ponownie, natomiast odcinki mogą się przecinać, mieć punkty wspólne. Przegrywa ten, który nie może poprowadzić odcinka. Który z chłopców ma strategię wygrywającą?
10. Iloczyn pewnej liczby naturalnej przez sumę jej cyfr jest równy 2008. Wyznaczyć wszystkie liczby o tej własności.
11. Czy prawdą jest, że do każdej liczby naturalnej równej iloczynowi dwóch kolejnych liczb naturalnych można dopisać z prawej strony dwie cyfry tak, aby otrzymać liczbę będącą kwadratem liczby naturalnej?
12. Na tablicy napisano następujące liczby 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, . . . itd. Każda kolejna liczba, poczynwszy od drugiej, powstaje z poprzedniej przez dodanie do niej sumy jej cyfr. Czy na tablicy pojawi się liczba 200720082009?
13. Obliczyć $\sqrt{2006 \cdot 2008 \cdot 2010 \cdot 2012 + 16}$.
14. Czy istnieją takie cyfry a i b , gdzie $b > a$, dla których liczba $\overbrace{aa \dots a}^{b \text{ cyfr}} - \overbrace{bb \dots b}^{a \text{ cyfr}}$ jest liczbą pierwszą?
15. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne a , dla których dwa zdania spośród poniższych trzech będą prawdziwe, a jedno fałszywe:
 - a. $a + 41$ jest kwadratem liczby naturalnej.
 - b. $a - 21$ jest liczbą podzielną przez 10.
 - c. $a - 48$ jest kwadratem liczby naturalnej.

16. W trapezie $ABCD$ podstawami są AB i CD , natomiast ramię AD jest równe sumie podstaw AB i CD .
Udowodnić, że dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i D przecinają się na ramieniu BC .
17. Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg. Na łuku BC nie przechodzącym przez punkt A wybrano punkt P , różny od końców łuku. Odcinki AP i BC przecinają się w punkcie K .
Wykazać, że $\frac{1}{|PK|} = \frac{1}{|PB|} + \frac{1}{|PC|}$.
18. W sali kinowej mamy 7 rzędów po 10 miejsc w każdym rzędzie. Na poranny seans przyszła grupa 50 uczniów. Ta sama grupa przyszła do tej sali na popołudniowy seans. Udowodnić, że w tej grupie znajdzie się dwoje dzieci, które zarówno na porannym seansie jak i na popołudniowym seansie siedziały w tym samym rzędzie (niekoniecznie o tym samym numerze, np. rano mogły siedzieć w rzędzie o numerze 1, a po południu w rzędzie o numerze 5).
19. Wyznaczyć największy wspólny dzielnik liczb $a = 2^{2009} - 1$ i $b = 2^{2010} + 1$.
20. Wyznaczyć 2009 liczb naturalnych takich, że suma tych liczb jest równa ich iloczynowi.

*Serdecznie zapraszamy
na uroczyste zakończenie Ligi Zadaniowej 2009/2010
29 maja 2010 r. o godzinie 10⁰⁰
na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK
w Toruniu*