

Liga Zadaniowa – województwo kujawsko-pomorskie

Klasa II gimnazjum – ETAP REJONOWY

Zadania przygotowawcze na III spotkanie konkursowe
w dniu 02 marca 2013 r.

Tematyka:

1. Twierdzenie Pitagorasa z zastosowaniami.
2. Działania na wyrażeniach algebraicznych.
3. Symetrie w układzie współrzędnych.

1. Oblicz: $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2012} + \sqrt{2011}}\right)$
2. Oblicz pole trapezu, w którym długości podstaw wynoszą 10 cm i 20 cm, a długości przekątnych są równe 18 cm i 24 cm.
3. Środki BD i CE trójkąta ABC są prostopadłe oraz $|BD| = 8$ i $|CE| = 12$. Oblicz pole trójkąta ABC .
4. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są w stosunku 3:4, a przeciwprostokątna ma długość 25 cm. Obliczyć:
 - promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
 - promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
 - długości środkowych tego trójkąta.
5. Środkiem sześciokąta foremnego jest punkt $(1, -1)$, a jednym z wierzchołków jest punkt $(5, -1)$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki sześciokąta oraz obliczyć jego obwód i pole.
6. Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami rzeczywistymi, to $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$.
7. Oblicz: $\sqrt{1 + 2012\sqrt{1 + 2011\sqrt{1 + 2010\sqrt{1 + 2009 \cdot 2007}}}}$
8. Przekształć wyrażenie $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}\right)$ do najprostszej postaci i rozstrzygnij, która z liczb $\frac{1}{8}$, czy wartość wyrażenia dla $x = \frac{4}{5}$ jest większa?
9. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i ramiona mają równe długości i wynoszą po 8 cm, a przedłużenia ramion przecinają się pod kątem prostym. Oblicz obwód i pole tego trapezu.
10. W trójkącie, którego długości boków wynoszą 16, 12, 20 wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie, promień okręgu wpisanego w ten trójkąt i odległość między środkami tych okręgów.
11. Oblicz pole sześciokąta, którego wszystkie kąty wewnętrzne mają tę samą miarę, a boki mają kolejno długości 2, 4, 2, 4, 2, 4.
12. Dla dowolnych liczb a i b udowodnij nierówność: $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$.
13. Oblicz: $\sqrt{2007 \cdot 2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 16}$.
14. Wyrażenie: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2a} - \frac{b}{a+b}\right) : \left[\left(a + 2b + \frac{b^2}{a}\right) \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right)\right]$, doprowadź do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a = 4 + \sqrt{7}$ i $b = \sqrt{7} - 4$.

15. W równoległoboku długości boków wynoszą 5 cm i 6 cm. Oblicz długości przekątnych równoległoboku, wiedząc że symetralna dłuższego boku przechodzi przez wierzchołek równoległoboku.
16. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b zachodzi nierówność: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.
17. Wyznacz pole ośmiokąta, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe, zaś boki mają długości $2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}$ w podanej kolejności.
18. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu opisanego na tym trójkącie.
19. W trójkącie prostokątnym ABC , w którym $|\angle ACB| = 90^\circ$, poprowadzono wysokość CD . Niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , zaś r_1 - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ADC , r_2 - promieniem okręgu wpisanego w trójkąt BCD . Udowodnić, że $r + r_1 + r_2 = |CD|$.
20. Bok prostokąta ma długość 24 cm, a jego przekątna ma długość 26 cm. Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty. W każdy z nich wpisujemy koło. Oblicz odległość między środkami tych kół.
21. Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki o długościach 2 cm i 8 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.
22. Obliczyć pole trapezu, w którym długości podstaw wynoszą 5 cm i 15 cm, a długości przekątnych są równe 12 cm i 16 cm.

Uwaga. W przygotowaniach do III spotkania konkursowego można wykorzystać: Zbiór zadań - „*Liga Zadaniowa*” - zad. 51 - 87 na str. 74 - 77 i zad. 276 - 310 na str. 101 - 105 oraz „*Koło matematyczne w gimnazjum*”.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki - „*Koło matematyczne w gimnazjum*” - zadania 102, 459, 460, 462, 500 oraz przykład 3 ze strony 17 i przykład 5 na stronie 120.