

**Zadania przygotowawcze na II spotkanie konkursowe
w dniu 9 stycznia 2016 r.**

Tematyka: 1. Pole i obwód koła.

2. Wyrażenia algebraiczne wraz ze wzorami skróconego mnożenia.

3. Działania na wyrażeniach algebraicznych.

1. Udowodnij, że liczba $5^{16} - 1$ jest podzielna przez 64.

2. Z trzech okręgów o jednakowych promieniach równych 2 dwa są styczne zewnętrznie, a trzeci ma środek w punkcie styczności (rysunek obok).

Oblicz pole i obwód otrzymanego w ten sposób obszaru.

3. Uzasadnij, że dla każdej liczby x wartość wyrażenia $4x^2 - 12x + 14$ jest nie mniejsza niż 5.

4. Oblicz pole i obwód zacieniowanej figury (rysunek obok), jeżeli długość boku kwadratu jest równa 10, a łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach tego kwadratu.

5. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-2} + b^{-2}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 2ab} \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{2ab}\right)^{-1}$, następnie wyznacz jego wartość dla $a = \sqrt{5} - 2$, $b = 2 + \sqrt{5}$ i rozstrzygnij, czy jest ona większa niż $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

6. Pewna liczba x ma taką własność, że $x + \frac{1}{x} = 3$. Nie wyznaczając liczby x oblicz $x^2 + \frac{1}{x^2}$ oraz $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

7. W trójkącie równobocznym o boku długości 8 środek O boku AB jest jednocześnie środkiem koła o promieniu 4. Oblicz pola i obwody zakreskowanych powierzchni S_1 oraz S_2 .

8. Uzasadnij, że dla każdej liczby x liczba $4x^2 - 4x + 11$ jest dodatnia.

9. Czy liczba $2^{2014} + 5^{20}$ jest liczbą pierwszą?

10. Porównaj pola oraz obwody figur F_1 i F_2 wiedząc, że $\triangle ABC$ jest prostokątny, $|AB| = |AC| = 4$, łuki CA i AB są półokręgami, zaś łuk BC jest ćwiartką okręgu o środku A .

11. Czy liczba $2013 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right)$ jest kwadratem liczby naturalnej?

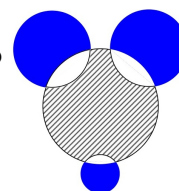
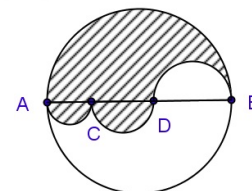
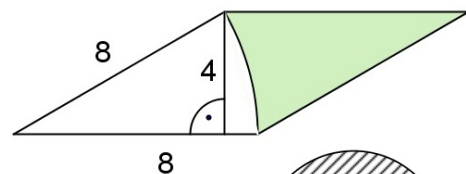
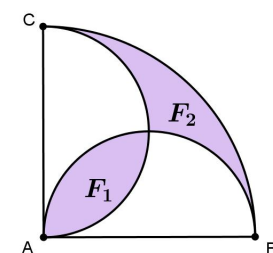
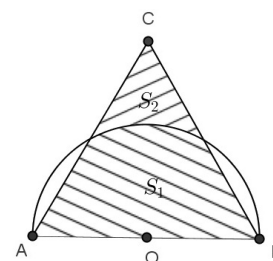
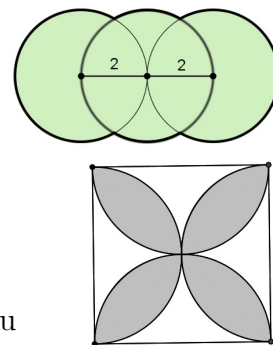
12. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb naturalnych n , m różnica kwadratów ich sumy oraz różnicy jest podzielna przez 4.

13. Oblicz pole zacieniowanego fragmentu rombu (rysunek obok).

14. Na średnicy AB koła obrano punkty C i D tak, że $|AC| = 6$, $|CD| = 8$, $|DB| = 10$. Na każdym z odcinków AC , CD i DB zbudowano półkoło (patrz rysunek). Porównaj pola i obwody obszarów zacieniowanego i niezacieniowanego w kole.

15. Uzasadnij, że liczba $3^{16} - 1$ jest podzielna przez 64.

16. Niech P będzie polem obszaru zacieniowanego, a S polem obszaru zakreskowanego (część największego koła). Średnice kół są równe: 6, 4, 4, 2. Uzasadnij, że $P = S$.



17. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych:

a) $\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} - 1\right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}, a = \frac{3}{4}, b = -0,25.$

b) $\left[\left(a + \frac{ab}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{ab}{a+b} - a\right)\right] : \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, a = -\frac{4}{5}, b = 0,6,$

c) $\left(x + y - \frac{4xy}{x+y}\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} + \frac{2xy}{x^2-y^2}\right), a = 0,6, b = -0,4.$

18. Czy liczba: a) $2009 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right),$
b) $3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \left(1 + \frac{2}{5}\right) \left(1 + \frac{2}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{2007}\right)$

jest liczbą pierwszą?

19. Oblicz pole i obwód zakreskowanych półksiężyców (patrz rysunek obok), gdzie długość boku kwadratu jest równa 10 cm, zaś zewnętrzne łuki są półokręgami zbudowanymi na bokach kwadratu, a wewnętrzny łuk jest okręgiem opisanym na kwadracie.

Uwaga. W przygotowaniach do II spotkania konkursowego można wykorzystać: Zbiór zadań - „Liga Zadaniowa” - zad. 52 - 81 na str. 29 - 31 i zad. 211 - 239 na str. 91 - 95 oraz „Koło matematyczne w gimnazjum” str. 16 - 21 i str. 133 - 150.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki - „Koło matematyczne w gimnazjum” - zadania 590, 595, 535, 107, 113 oraz przykład 8 ze strony 19 i przykład 12 na stronie 140. Ponadto „Liga Zadaniowa” - zadania 226 i 224 na stronie 93.

