

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa I gimnazjum

**Zadania niespodzianki na spotkanie kończące Ligę Zadaniową
w roku szkolnym 2016/2017.**

1. Z liczby trzycyfrowej x tworzymy liczbę trzycyfrową y przenosząc cyfrę pierwszą z lewej strony na prawy kraniec zapisu liczby. Okazuje się, że trzykrotność liczby x jest równa czterokrotności liczby y . Znajdź wszystkie liczby o opisanej własności.
2. W poniższych zapisach operacji dodawania pisemnego różnym literom odpowiadają różne cyfry, różnym cyfrom - różne litery.

$$(a) \quad \begin{array}{rcccc} & & S & T & U & K \\ + & & & P & U & K \\ \hline K & T & O & T & O & \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{rcccc} & & S & T & U & K \\ + & & & P & U & K \\ \hline U & L & K & A & & \end{array}$$

Uzasadnij, że nie istnieje zestaw cyfr odpowiadający literom zagadki (a), który prowadziłby do prawidłowego zapisu operacji dodawania, i że istnieją co najmniej cztery rozwiązania zagadki (b).

3. Pięć paszczurów zjada średnio sześć kaktusaków w ciągu czterech dni. Ile kaktusaków zostanie zjedzonych przez osiem paszczurów w ciągu dziesięciu dni?
4. Która z liczb jest większa: 80% średniej arytmetycznej pewnych czterech liczb dodatnich, czy 20% sumy tych czterech liczb?
5. Z sześćdziesięciu jednakowych klocków sześciennych budujemy prostopadłościany. Ile różnych prostopadłościanów można zbudować? Który z nich ma największe pole powierzchni całkowitej? Przyjmujemy, że prostopadłościany o wymiarach $1 \times 2 \times 3$ i $3 \times 1 \times 2$ są identyczne.
6. Liczba n jest naturalna. Odgadnij tę liczbę wiedząc, że spośród podanych niżej pięciu zdań pewne dwa są prawdziwe, a pozostałe trzy są fałszywe:
(1) $2n > 70$, (2) $n < 100$, (3) $4n > 25$, (4) $n > 10$, (5) $n > 5$.

7. O każdym z panów A , B , C , D wiadomo, że albo zawsze mówi prawdę, albo zawsze kłamie.

A mówi: „Co najmniej jeden z nas jest kłamcą.”

B mówi: „Co najmniej dwóch z nas to kłamcy.”

C mówi: „Co najmniej trzech z nas to kłamcy.”

D mówi: „Nikt z nas nie kłamie.”

Rozstrzygnij, kto mówi prawdę, a kto kłamie.

8. Trzy stosy zawierają odpowiednio 11, 7 i 6 patyczków. W jednym ruchu można przełożyć z jednego stosu na drugi stos dokładnie tyle patyczków, ile właśnie jest w drugim stosie. Jak, wykonując trzy operacje, doprowadzić do takiego układu, w którym w każdym stosie będzie tyle samo patyczków?
9. Czy można ułożyć wszystkie 28 kamieni domina w jednej linii zgodnie z zasadą mówiącą, że dwa sąsiednie kamienie stykają się identycznymi układami kropek, i równocześnie tak, że na początku i na końcu znajduje się szóstką?
10. Danych jest 10 liczb naturalnych nie większych niż 91. Uzasadnij, że można wybrać spośród nich dwie takie liczby a i b , że $\frac{2}{3} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{3}{2}$.

11. Udowodnij, że każda liczba sześciocyfrowa $\overline{ababab}$, gdzie a jest dowolną cyfrą różną od zera i b jest dowolną cyfrą, dzieli się przez 7, 13 i 37.
12. Czy istnieje liczba naturalna n o tej własności, że zapis w układzie dziesiętkowym liczby $k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$ kończy się dokładnie pięcioma zerami?
13. Jaka jest ostatnia cyfra liczby $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2$?
14. O siedmiu liczbach całkowitych wiadomo, że suma każdych sześciu z nich jest podzielna przez 5. Uzasadnij, że każda z tych liczb jest podzielna przez 5.
15. Wskaż największą liczbę naturalną, która jest podzielna przez 4 i zapisana jest przy pomocy różnych cyfr.
16. Wskaż najmniejszą liczbę naturalną, która dzieli się przez 5 i jej zapis zawiera wszystkie cyfry: 0, 1, 2, ..., 9.
17. Udowodnij, że jeśli a i b są dwiema cyframi, których suma jest podzielna przez 7, to liczba $\overline{aba}$ też jest podzielna przez 7.
18. Udowodnij, że jeżeli suma cyfr trzycyfrowej liczby $\overline{abc}$ jest podzielna przez 7, to liczba $\overline{abc}$ jest podzielna przez 7 dokładnie wtedy, gdy $b = c$.
19. Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie O . Uzasadnij, że pola trójkątów AOD i BOC są równe.
20. Uzasadnij, że jeśli w czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O i pola trójkątów AOD i BOC są równe, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD .

*Serdecznie zapraszamy
na uroczyste podsumowanie Ligi Zadaniowej
w roku szkolnym 2016/2017!*