

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
województwo kujawsko-pomorskie
Prezent wakacyjny 2020 r.

1. Ilość zerami kończy się liczba będąca iloczynem wszystkich liczb naturalnych parzystych od 2 do 2020 włącznie?
2. Czy liczbę 2020 można przedstawić jako sumę pewnej liczby (przynajmniej dwóch) kolejnych liczb naturalnych?
3. Wyznacz sumę cyfr liczby $10^{2020} - 2020$.
4. Wyznacz sumę cyfr kwadratu liczby zapisanej tylko przy pomocy 2020 dziewiątek.
5. Liczba naturalna a jest podzielna przez 9 i jej zapis dziesiętny zawiera 2020 cyfr. Obliczamy sumę cyfr liczby a otrzymując liczbę b . Następnie liczymy sumę cyfr liczby b i otrzymujemy liczbę c . Postępowanie to kontynuujemy tak długo, aż otrzymamy liczbę jednocyfrową. Jaka to będzie liczba i ile maksymalnie kroków trzeba będzie wykonać?
6. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej n . Czy istnieje liczba naturalna n , dla której zachodzi równość
 - a) $n + S(n) + S(S(n)) = 2020$,
 - b) $n + S(n) + S(S(n)) + S(S(S(n))) = 2020$?
7. Czy liczba $2020^2 + 2021$ jest kwadratem liczby naturalnej?
8. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną, której suma cyfr jest równa 2020.
9. Czy tablicę o wymiarach 2020×2020 można wypełnić liczbami (w każdą kratkę wpisujemy jedną liczbę) tak, by w każdej kolumnie suma liczb była dodatnia a w każdym wierszu suma liczb była ujemna?
10. Czy można znaleźć 25 liczb takich, że wypisane w jednym wierszu jedna za drugą mają następującą własność: suma każdych trzech sąsiadujących ze sobą liczb jest dodatnia natomiast suma wszystkich liczb jest ujemna?
11. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną dodatnią taką, że jej połowa jest kwadratem liczby naturalnej, jej trzecia część jest sześcianem liczby naturalnej, zaś jej piąta część jest piątą potęgą liczby naturalnej.
12. Czy zawsze spośród dowolnych 100 liczb całkowitych można wybrać 15 liczb tak, by różnica każdych dwóch z nich była podzielna przez 7?
13. Czy liczba $2017 \cdot 2019 \cdot 2021 \cdot 2013 + 16$ jest kwadratem liczby naturalnej?
14. Uzasadnij, że liczba $2018 \cdot 2020 \cdot 2022 + 8080$ jest sześcianem liczby naturalnej.
15. Wiadomo, że różnica kwadratów pewnych dwóch liczb naturalnych jest równa 101. Jakie to liczby?
16. Czy istnieją dwie kolejne liczby naturalne takie, że suma cyfr każdej z nich jest podzielna przez 10?

17. Wiadomo, że liczba naturalna n ma dokładnie 100 różnych dzielników. Udowodnij, że iloczyn tych 100 dzielników jest równy n^{50} .
18. W trapezie równoramiennym $ABCD$ punkt X jest środkiem ramienia AD , odcinek DX ma długość 1, zaś kąt CXB jest prosty. Wyznacz obwód tego trapezu.
19. Trójkąty ABC i APK są przystające. Wiadomo, że bok AB ma długość 3 cm, boki AC i AP mają długość 4 cm każdy, a bok AK ma długość 5 cm. Wyznaczyć długości boków BC i PK .
20. Na prostej dane są różne punkty A, B, C oraz punkt D leżący poza tą prostą. Udowodnić, że $\frac{P_{\triangle ABD}}{P_{\triangle ACD}} = \frac{|AB|}{|AD|}$.

Uwaga: Tezę tego zadania często zapisujemy w postaci $P_{\triangle ABD} = \frac{|AB|}{|AD|} \cdot P_{\triangle ACD}$.

21. W trójkącie ABC na boku AB obrano taki punkt M , że $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{1}{4}$. Udowodnij, że

$$P_{\triangle AMC} = \frac{1}{5} \cdot P_{\triangle ABC}.$$

22. W trójkącie ABC obrano punkty M i P odpowiednio na bokach AB i AC tak, że $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{2}{3}$ i $\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{1}{4}$. Udowodnić, że $P_{\triangle AMP} = \frac{2}{25} \cdot P_{\triangle ABC}$.
23. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O . Udowodnij, że $\frac{P_{\triangle ABD}}{P_{\triangle BCD}} = \frac{|AO|}{|OC|}$.
24. W trójkącie ABC środkowe AM i BP przecinają się w punkcie G . Udowodnić, że $|AG| = 2|GM|$.
25. W trójkącie ABC z wierzchołka A poprowadzono prostą przechodzącą przez środek środkowej BP . W jakiej proporcji prosta ta dzieli bok BC ?
26. Z wierzchołka B trójkąta ABC poprowadzono dwie proste, które podzieliły bok AC na trzy równe części. W jakim stosunku proste te dzielą środkową wychodzącą z wierzchołka A ?
27. Na bokach AB i BC trójkąta ABC obrano odpowiednio takie punkty K i M , że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BM|}{|MC|} = \frac{1}{5}$. W jakiej proporcji prosta KM dzieli środkową wychodzącą z wierzchołka B ?
28. Dany jest trójkąt ABC . Wiadomo, że $|AB| = 4$, $|AC| = 2$, $|BC| = 3$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie K . Prosta przechodząca przez punkt B i równoległa do AC przecina przedłużenie dwusiecznej AK w punkcie M . Wyznacz długość odcinka KM .
29. Uzasadnij, że w trójkącie ABC zachodzi nierówność $|AM| < \frac{1}{2}(|AB| + |AC|)$, gdzie M jest środkiem boku BC .
30. Dany jest prostokąt $ABCD$ oraz punkt M leżący wewnątrz tego prostokąta. Przez punkt M poprowadzono dwie proste równoległe do boków prostokąta i prostopadłe względem siebie. Podzieliły one prostokąt $ABCD$ na cztery prostokąty.
 - a) Udowodnij, że co najmniej jeden z tych prostokątów ma pole nie większe od $\frac{1}{4}$ pola prostokąta $ABCD$.
 - b) Udowodnij, że pole jednego z dwóch prostokątów, których jednym z wierzchołków jest A lub C ma pole nie większe niż $\frac{1}{4}$ pola prostokąta $ABCD$.

Życzymy udanych wakacji!