

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
województwo kujawsko-pomorskie
Prezent wakacyjny 2023 r.

1. Uzasadnić, że spośród dowolnych pięciu liczb naturalnych można wybrać trzy liczby, których suma jest podzielna przez 3.
2. Czy wśród dowolnych dwunastu kolejnych liczb naturalnych większych niż 3 można znaleźć pięć liczb pierwszych?
3. Każdą liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2023\}$ mnożymy przez każdą inną liczbę z tego zbioru. Wyznaczyć sumę wszystkich takich iloczynów.
4. Czy istnieje liczba naturalna n taka, że zapis dziesiętny liczby n^2 zaczyna się układem cyfr 123456789 i kończy się układem cyfr 987654321?
5. Wyznaczyć liczbę naturalną n taką, która jest podzielna przez 5 i przez 49 oraz ma dokładnie 10 dzielników.
6. Uzasadnić, że jeśli liczby a, b, c, d, e są różnymi liczbami całkowitymi spełniającymi równość $(4 - a) \cdot (4 - b) \cdot (4 - c) \cdot (4 - d) \cdot (4 - e) = 12$, to $a + b + c + d + e = 17$.
7. Wyznaczyć wszystkie prostokąty, których długości boków są liczbami naturalnymi i dla których liczba wyrażająca pole jest równa liczbie wyrażającej obwód.
8. Czy można znaleźć 10 kolejnych liczb całkowitych, których suma jest równa 100?
9. Czy można znaleźć 2023 kolejne liczby całkowite, których suma jest równa 2023^2 ?
10. Liczbę naturalną 2023 przedstawić w postaci sumy pewnej liczby liczb naturalnych, tak by iloczyn składników takiej sumy był największy z możliwych.
11. Udowodnić, że liczba naturalna jest podzielna przez 9 (przez 3) jeśli suma cyfr w jej zapisie dziesiętnym jest podzielna przez 9 (przez 3) i odwrotnie.
12. Udowodnić, że jeśli reszta z dzielenia liczby naturalnej a przez 9 (przez 3) jest równa r , to także reszta z dzielenia sumy cyfr liczby a przez 9 (przez 3) jest równa r i odwrotnie.
13. Zapis dziesiętny liczby naturalnej m podzielnej przez 9 składa się z 2023 cyfr. Niech liczba a będzie sumą cyfr liczby m , liczba b sumą cyfr liczby a oraz liczba c niech będzie sumą cyfr liczby b . Wyznaczyć liczbę c .
14. Zapisy dziesiętne liczb 2^{2023} i 5^{2023} zapisano „jeden za drugim” w jednym wierszu i otrzymano zapis dziesiętny pewnej liczby. Ile cyfr zawiera ten zapis?
15. Uzasadnić, że wśród każdych dziesięciu kolejnych liczb naturalnych istnieje taka liczba, dla której największy wspólny dzielnik z każdą z pozostałych liczb jest równy 1.
16. Udowodnić, że trójkąt w którym dwa boki są tej samej długości i jeden z kątów ma miarę 60° jest równoboczny.
17. Udowodnić, że trójkąt w którym dwie wysokości są tej samej długości i jeden z kątów ma miarę 60° jest równoboczny.
18. Obliczyć pole trójkąta, w którym dwa boki mają długości 5 cm i 12 cm, a kąt między tymi bokami ma miarę 120° .
19. Uzasadnić, że pole dowolnego trójkąta zawartego w równoległoboku o polu 10 cm^2 nie przekracza 5 cm^2 .

20. **Uogólnienie.** Udowodnić, że pole dowolnego trójkąta zawartego w równoległoboku nie przekracza połowy pola tego równoległoboku.
21. W kwadracie o boku długości 4 cm wybrano 9 punktów, takich że żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że niezależnie od rozmieszczenia tych dziewięciu punktów można wybrać spośród nich trzy punkty tak, by były one wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż 2 cm^2 .
22. W prostokącie $ABCD$ wyznaczyć taki punkt, dla którego suma jego odległości od wierzchołków prostokąta jest najmniejsza z możliwych.
23. Udowodnić, że w czworokącie wypukłym punktem wewnętrznym czworokąta, dla którego suma jego odległości od wierzchołków czworokąta jest najmniejsza, jest punkt przecięcia przekątnych czworokąta.
24. Wewnątrz prostokąta $ABCD$ wybrano punkt K i połączono go odcinkami z wierzchołkami prostokąta. Udowodnić, że niezależnie od wyboru punktu K , z odcinków AK, BK, CK i DK można wybrać trzy odcinki takie, które mogą być bokami trójkąta.
25. Wykaż, że liczby a, b, c są długościami boków trójkąta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby dodatnie x, y, z takie, że $a = x + y, b = y + z, c = z + x$.
26. W trójkącie prostokątnym ABC na przeciwprostokątnej AB obrano punkt K . Następnie rzutowano prostopadle ten punkt na przyprostokątne AC i BC otrzymując odpowiednio punkty M i N . Przy jakim położeniu punktu K odcinek MN jest najkrótszy?
27. W trójkącie ABC długość każdej wysokości jest większa niż 1. Udowodnić, że pole tego trójkąta jest większe niż $\frac{1}{2}$.
28. Wielokąt wypukły W_1 leży wewnątrz wielokąta wypukłego W_2 . Udowodnić, że obwód wielokąta W_1 jest mniejszy od obwodu wielokąta W_2 .
29. W kwadracie o boku 4 cm zawarty jest ośmiokąt wypukły. Udowodnić, że długość co najmniej jednego boku tego ośmiokąta jest mniejsza niż 2 cm.
30. W trójkącie ABC oznaczamy przez a, b, c długości boków leżących naprzeciw wierzchołków A, B, C odpowiednio oraz przez m_a, m_b, m_c – długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków A, B, C . Udowodnić, że

$$\frac{1}{2}(a + b - c) < m_c < \frac{1}{2}(a + b).$$

31. Udowodnić, że w dowolnym trójkącie suma środkowych jest większa od $\frac{3}{4}$ obwodu trójkąta i jednocześnie mniejsza od obwodu tego trójkąta.
32. Uzasadnić, że dla dowolnych liczb x, y, z zachodzi nierówność $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$.
33. Udowodnić, że w dowolnym trójkącie zachodzi nierówność $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.
34. Na półce stały modele prostopadłościanów oraz ostrosłupów trójkątnych i czworokątnych. Nauczyciel zdjął z półki kilka modeli i postawił na ławce. Zosia policzyła, że wybrane bryły mają łącznie 37 wierzchołków i 33 ściany. Jakie modele nauczyciel postawił na ławce.
35. Na okręgu o środku O znajdują się punkty $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ o tej własności, że kąty $\sphericalangle A_1OA_2, \sphericalangle A_2OA_3, \dots, \sphericalangle A_9OA_{10}, \sphericalangle A_{10}OA_1$ mają miarę 36° . Punkty te są wierzchołkami dziesięciokąta $A_1A_2A_3 \dots A_{10}$. Oblicz miary kątów przecięcia się przekątnych:
 - a) A_1A_3 i A_2A_4 ;
 - b) A_1A_3 i A_2A_5 ;
 - c) A_1A_3 i A_2A_6 .

Życzymy udanych wakacji!