

Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki
Województwo kujawsko-pomorskie

Klasa VII szkoły podstawowej

Zadania przygotowawcze do III spotkania drugiego etapu w dniu 25 marca 2023 r.

Tematyka: 1. Zadania logiczne. 3. Równania w zadaniach tekstowych.
2. Przekształcanie wzorów. 4. Potęgi i pierwiastki.

1. Oblicz $\frac{48^4 \cdot 9^8}{18^4 \cdot 12^8 + 72^4 \cdot 6^8} : \left(\frac{3}{4}\right)^4$.
2. Ze wzoru $x = \frac{2a-3}{a+4}$ wyznacz zmienną a , a następnie oblicz wartość zmiennej a wiedząc, że $x = -3,5$.
3. Uzasadnij, że liczba $4^{20} + 4^{22} + 4^{24}$ jest podzielna przez 13.
4. Oblicz $\frac{\sqrt{5 \cdot \sqrt{121}} + 2 \cdot \sqrt[3]{343} - 5 \cdot \sqrt[4]{256}}{\sqrt{300} - \sqrt{108} + 3 \cdot \sqrt{3}} \cdot (-\sqrt{3})^3$.
5. Pomidory zawierają 95% wody. Ile trzeba wziąć pomidorów, aby otrzymać z nich w procesie suszenia cztery kilogramy suszonych pomidorów, które zawierają 15% wody?
6. Przy okrągłym stole siada 5 osób: Ala, Bartek, Celina, Danko i Emil. Miejsca są ponumerowane liczbami od 1 do 5, zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Na miejscu z numerem 1 usiadła Ala. Na ile sposobów mogą usiąść pozostałe osoby, zachowując następującą regułę: **każda para sąsiadów ma imiona zaczynające się od liter, które NIE WYSTĘPUJĄ OBOK SIEBIE W ALFABECIE?**
7. Przez jakie najmniejsze liczby całkowite dodatnie należy przemnożyć liczby $A = 2016$, $B = 765 \cdot 56 \cdot 7$, aby otrzymać kwadrat (sześcián, czwartą potęgę, ...) liczby naturalnej?
8. Jeżeli w pewnej liczbie dwucyfrowej zamienimy kolejność cyfr, to otrzymamy liczbę o 75% większą od pierwszej. Znajdź wszystkie liczby o tej własności.
9. W dniu 15 marca Tobiasz zauważył, że w ostatnich dwóch tygodniach wydawał średnio 20 zł tygodniowo. Tydzień później okazało się, że zapisy Tobiasza z trzech początkowych tygodni marca wskazywały na to, iż wydawał on średnio 24 zł tygodniowo. Po upływie czterech tygodni marca chłopiec zauważył, że średnia z tygodniowych wydatków, liczona z 4 tygodni, była równa 25 zł. Ile pieniędzy wydał Tobiasz w trzecim tygodniu marca, a ile w czwartym?
10. Ze wzoru $c = \frac{3a+b}{2a+5b}$ wyznacz zmienną a , a następnie oblicz wartość a^7 , gdy $b = (-0,75)^2$ i $c = -3$.
11. Mały dźwig przeładowuje pewną ilość towaru w ciągu 12 godzin. Tę samą ilość towaru średni dźwig przeładowuje w ciągu 8 godzin, a duży dźwig w ciągu 5 godzin. Wspomnianą ilość towaru przez 2 godziny przeładowywały równocześnie dźwigi: mały i średni. Czy wystarczy dodatkowych 2 godzin na to, by przeładunek dokończyły dźwigi: średni i duży, podczas gdy mały dźwig zostanie wyłączony z pracy?
12. Janek powiedział do swojego brata: „Gdybyś oddał mi trzecią część swoich oszczędności, to mielibyśmy po tyle samo pieniędzy”. W tym momencie do pokoju weszła mama i wręczyła każdemu z chłopców po 60 złotych „kieszonkowego”. Wówczas Janek powiedział do brata: „Teraz mielibyśmy po tyle samo pieniędzy, gdybyś mi oddał czwartą część swoich oszczędności”. Ile pieniędzy miał przed wypłatą „kieszonkowego” każdy z braci? O ile procent wzrosły po wypłacie „kieszonkowego” oszczędności każdego z chłopców?
13. W grupie ankietowanych n osób $\frac{2}{5}$ wszystkich uczestników ankiety zadeklarowało się jako wielbiciel literatury. Równocześnie $\frac{3}{10}$ wszystkich ankietowanych oświadczyło, że potrafi grać na przynajmniej jednym instrumencie muzycznym. Wśród wielbicieli literatury co czwarta osoba umie grać na jakimś instrumencie muzycznym. Jaki procent osób niebędących wielbicielami literatury stanowią osoby grające na jakimś instrumencie muzycznym?
14. Wiedząc, że $\frac{2a+b}{3b} = \frac{1}{2}$, oblicz $\frac{(a - \frac{1}{2}b)^2 - (2a + \frac{3}{4}b)^2}{4a^2 - b^2}$.
15. Każdy z chłopców, Jurek, Krzys i Marek, posiadał pewną liczbę szklanych kulek. W pewnej chwili wykonali oni następującą operację. Najpierw Jurek ze swojego zapasu kulek dał Krzysowi i Markowi po tyle kulek, że stan ich posiadania potroił się. Następnie Krzys uszczuplił swoje zapasy przekazując Jurkowi i Markowi tyle kulek, że każdy z tych chłopców miał ich cztery razy więcej niż przed podarunkiem Krzysia. Na koniec Marek dał Jurkowi i Krzysowi ze swojego zapasu po tyle kulek, ile każdy z nich aktualnie miał. W rezultacie każdy z chłopców miał po 72 kulki. Ile kulek miał każdy z chłopców na początku?
16. Do podwieczorku urodzinowego dwóch bliźniaczek zasiadły obie jubilatki wraz z czworgiem gości. Średni wiek wszystkich uczestników podwieczorku był równy 18 lat. Gdy jubilatki wyszły na chwilę z pokoju, by otworzyć drzwi spóźnionym gościom, średnia wieku czterech osób pozostałych w pokoju była równa 22 lata. W jakim wieku były bliźniaczki?

17. Ze wzoru wyznacz zmienną a : a) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, b) $P = 2ab + 2ac + 2bc$, c) $S = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2}$,
d) $t = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, e) $x = \frac{a+3}{a+1}$, f) $c = \frac{a \cdot b}{a+b}$, g) $c = \frac{3a+b}{\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b}$.
18. Wiedząc, że $\frac{a-4b}{b} = 7$, oblicz: a) $\frac{2a+3b}{a}$, b) $\frac{a^2-4ab-16b^2}{a^2+b^2}$, c) $\frac{(a+2b)^2 - (2a-3b)^2}{(5b-a)^2}$.
19. Wiedząc, że $a^2 = a + 1$, uzasadnij, że $a^3 = 2a + 1$, $a^4 = 3a + 2$, $a^5 = 5a + 3$.
20. Zosia przechowuje swoje oszczędności tylko w monetach dwuzłotowych i pięciozłotowych. Wartość wszystkich dwuzłotówek stanowi czwartą część całych jej oszczędności, a pięciozłotówek ma 36. Ile pieniędzy ma Zosia?
21. Do końca doby zostało 60% czasu, który upłynął od początku doby. Która jest godzina?
22. Woda stanowi 84% wagi spragnionego wielbłąda Kubusia. Jeśli ten wielbłąd się napije, jego waga wynosi 800 kg, a woda stanowi 85% jego wagi. Jaka jest waga spragnionego Kubusia?
23. Pociąg, jadąc ze stałą prędkością, przejeżdża przez most długości 450 m w ciągu 45 sekund. Jadąc z tą samą prędkością w ciągu 15 sekund pociąg ten mija słup telegraficzny. Jaka jest długość pociągu i jaka jest jego prędkość w km/godz?
24. Andrzej jest **lżejszy** o 20% od Bartka, Bartek jest **cięższy** o 10% od Radka. Najlżejszy z chłopców waży 44 kg. Ustaw chłopców w kolejności od najlżejszego do najcięższego i podaj, ile waży każdy z nich.
25. Brat i siostra otrzymali od rodziców pewną ilość pieniędzy. Jeśli siostra odda bratu 20% swojej części, to brat będzie miał o 50% więcej pieniędzy niż siostra. Które dziecko otrzymało od rodziców więcej pieniędzy?
26. Okrągły stół nakryto dla pięciu osób, przy czym nakrycie dla każdej z osób, która zasiądzie przy stole, jest innego koloru: jedno żółte, drugie niebieskie, trzecie zielone, czwarte fioletowe i piąte pomarańczowe. Do stołu zasiadą panowie X i Y oraz panie A , B i C . Pan X nigdy nie siada obok pani A . Na ile sposobów można rozmieścić przy stole te pięć osób tak, aby pan X i pani A nie siedzieli obok siebie?
27. Oblicz: a) $\frac{4 \cdot 2^{20} + \frac{1}{4} \cdot 8^8 + 2 \cdot 4^{11}}{2^{22} + 4 \cdot 16^5}$, b) $\frac{8^3 \cdot 6^5}{8 \cdot 6^8 - 6 \cdot 12^5}$, c) $\frac{(3^2 + 5^2 + 6^2)^7}{(7^6 + 7^8)(3 \cdot 5^5 + 5^7)}$, d) $\frac{4^6 \cdot 5^{12} + 2^5 \cdot 10^{10}}{40^4 \cdot 25^3 - 100^5}$
e) $\frac{2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}}$, f) $\frac{10^{42} \cdot 7^{41} - 10 \cdot 5^{43} \cdot 14^{40}}{2^{42} \cdot 35^{40} + 10^{40} \cdot 7^{41}}$, g) $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$.
28. W każdej z podanych par liczb wskaż liczbę większą: a) $(1,5)^{64}$ i 6^{16} , b) 81^{64} i 4^{192} , c) 25^{27} i 8^{42} .
29. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej: 2^{90} , 3^{60} , 5^{45} , 8^{45} , 16^{30} .
30. W każdej z podanych par liczb wskaż liczbę mniejszą: a) $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$ i 10^{55} , b) 10^{55} i 2^{200} .
31. Uzasadnij, że liczba n jest podzielna przez liczbę k :
a) $n = 7^{2020} - 7^{2018}$ i $k = 3$, b) $n = 3^{80} + 3^{82} + 3^{84} + 3^{86}$ i $k = 41$.
32. Podaj przynajmniej 2 pary liczb całkowitych dodatnich m i n takich, że $2 \cdot n^3 = m^4$.
33. Podaj cyfrę jedności liczb: 2^{100} , 3^{531} , 27^{345} , $234^{567} \cdot 567^{890}$, $2^{2018} + 3^{2019} + 4^{2020}$, $9^{888} + 7^{666} \cdot 4^{333}$.
34. Wypisz wszystkie dzielniki dodatnie podanych liczb: 3^5 , 2^8 , 7^{15} , 6^2 , 15^3 , $2^5 \cdot 3$, $3^4 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 7^3$, $7^3 \cdot 11 \cdot 13^2$.
35. Ile różnych dzielników dodatnich ma każda z podanych liczb: $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7$, $12^3 \cdot 14^4$, $33^4 \cdot 34^3 \cdot 35^2 \cdot 36$, $6^{12} \cdot 4^{10} + 6^{11} \cdot 4^{11} + 6^{10} \cdot 4^{12}$?
36. Oblicz: a) $\sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[3]{729}} + 9 \cdot \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{625} + 4 \cdot \sqrt[4]{81}}$, b) $(3\sqrt[3]{56} + 2\sqrt[3]{189} - 2\sqrt[3]{25 \cdot 35})^3$,
c) $\frac{10\sqrt{1+10\sqrt{64}}}{\sqrt[3]{444-101} + \sqrt[3]{4\sqrt{144}-\sqrt{441}}}$, d) $\frac{(\sqrt{6})^5 \cdot (\sqrt[3]{18})^6}{(\sqrt{8})^3 \cdot (\sqrt[3]{9})^{12}} \cdot \sqrt{3}$, e) $\frac{[3 \cdot (\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} + 1)]^2}{(\sqrt{5})^4 \cdot [(\sqrt{2})^6 + 1]}$, f) $\frac{\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{27} + 15 \cdot \sqrt[3]{64}}}{\sqrt[3]{36 \cdot \sqrt[4]{48 \cdot 27}}} \cdot (2\sqrt{3})^2$.
37. Porównaj liczby: a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{125} + 120} + 120}$ i $\sqrt{2 \cdot \sqrt{256} - 3 \cdot \sqrt[4]{256} + 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{2+5-6}}}$; b) $\sqrt[3]{\frac{2020}{2021}}$ i $\sqrt[3]{\frac{2019}{2020}}$;
c) $\sqrt{2 \cdot 4^5 + 2^{11}}$ i 2^6 ; d) $\sqrt{2}$ i $\sqrt[3]{3}$; e) $\sqrt[4]{3}$ i $\sqrt[5]{4}$.

Uwaga. W przygotowaniach do III spotkania konkursowego można wykorzystać zbiory zadań:

- *Liga Zadaniowa*, str. 32-33 (zad. 82-100), str. 46-68, str. 157 (zad. 21);
- *Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego*, zad. 19-23, 27, 29, 30, 37-39, 42-46, 53-61, 99-153, 295-296, 313-315, 593, 594, 598, 605, 607, 609, 614, 619;
- *Koło matematyczne w szkole podstawowej*, rozdziały: Logika, Prędkość, droga, czas, Równania, Zadania o wieku;
- *Koło matematyczne w gimnazjum*, rozdziały: Równania i nierówności, Procenty, Zadania logiczne.

Dodatkowe zadania przygotowawcze na etap wojewódzki

Liga Zadaniowa – 30 lat konkursu matematycznego, zadania 128, 133, 148, 159, 170, 172, 206, 212, 232, 234.